Vorbereitung

Resonanz
Versuch P1-12, 22

Iris Conradi
Gruppe Mo-02

9. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Pohlsches Rad

Das Pohlsche Rad ist eine spezielle Form des Drehpendels. Abbildung 1 zeigt ein solches Modell.
Eine Massescheibe kann gedreht werden, die Auslenkung kann an der runden Skala abgelesen werden. Durch die angebrachte Schneckenfeder wirkt entgegen einer Auslenkung der Massescheibe eine rücktreibende Kraft.
Außerdem ist es möglich durch eine Wirbelstrombremse[1] gezielt eine Dämpfung der Schwinung herbeizuführen.
Durch den Erregermotor kann auch eine erzwungene Schwingung durchgeführt werden. Da die Motordrehzahl proportional zu Spannung am Motor ist, kann die Erregung gut eingestellt werden.

[1] Die metallische Massescheibe wird gebremst,da durch ein äußeres Magnetfeld in ihr Stöme induziert werden, welche wiederum nach der Lenzschen Regel ein Magnetfeld erzeugen, welches dem von außen angelegten entgegenwirkt. Durch Variation des Stroms, welcher durch die Wirbelstrombremse fließt kann das äußere Magnetfeld eingestellt werden.

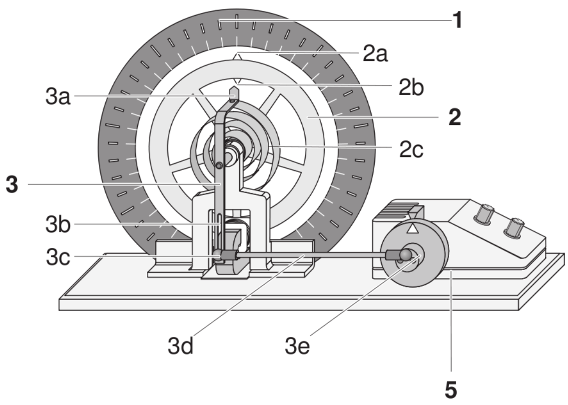

Abbildung 1: Pohlsches Rad

Harmonischer Oszillator

Einer harmonischen Schwingung liegt folgende Differentialgleichung zu Grunde:

$$m\ddot{x} = -Dx \tag{1}$$

Der Bewegung des Körpers wirkt also eine Kraft entgegen die proportional zur Auslenkung x des Körpers aus der Ruhelage ist. In der Ruhelage wirkt keine rücktreibende Kraft.
Im einfachsten Fall handelt es sich um eine Federschwingung, dann ist der Proportionalitätsfaktor D die Federkonstante.

In den hier durchzuführenden Versuchen wird jedoch das oben beschriebene Pohlsche Rad verwendet. Es handelt sich also um ein Drehpendel.
Die Äquivalenzen zwischen linearer Bewegung und Drehbewegung sind in Tabelle 1 aufgeführt.
D^* bezeichnet die Federkonstante der Schneckenfeder.

Außerdem kann es sich um eine gedämpfte Schwingung handeln. Der Koeffizient der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung wird mit α bezeichnet.

Somit ergibt sich für diese Situation folgende lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$I \cdot \ddot{\varphi} + \alpha \cdot \dot{\varphi} + D^* \cdot \varphi = 0 \tag{2}$$

lineare Bewegung	Drehbewegung
Kraft F	Drehmoment M
Auslenkung x	Winkel φ
Geschwindigkeit $\dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$
Beschleunigung $\ddot{x}$	Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$
Masse m	Massenträgheitsmoment I
$F = m \cdot \ddot{x}$	$M = I \cdot \ddot{\varphi}$

Tabelle 1: Äquivalenz von linearer Bewegung und Drehbewegung

Nun kann man folgende Definitionen einführen: $\gamma = {}^{\alpha}/_{2I}$, $\omega_0^2 = {}^{D^*}/_{I}$ und erhält:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \tag{3}$$

ω_0 bezeichnet hierbei die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung.

Zur Lösung dieser Gleichung wendet man den Exponentialansatz an:

$$\varphi = C \cdot e^{\lambda t} \tag{4}$$

Nach dem Einsetzen erhält man als Lösung einer quadratischen Gleichung für λ:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung ist also eine Linearkombination beider Lösungen für λ:

$$\varphi(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{6}$$

Nun muss man jedoch nach dem Radikanten eine Fallunterscheidung vornehmen. Für jeden Fall wird die allgemeine Lösung dann eine andere Form annehmen.

Schwingfall: schwache Dämpfung $\boldsymbol{\gamma < \omega_0}$ Es ergibt sich

$$\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i \cdot \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{=:\omega} \tag{7}$$

Nun kann man dies in die allgemeine Lösung einsetzen. Um jedoch eine rein reelle (physikalisch sinnvolle) Lösung zu erhalten fordern wir hier $C_1 = C_2^*$ und erhalten nach Umformungen:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t} \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right) \tag{8}$$

A und B werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Wir erhalten also eine exponentiell mit der Zeit abfallende Schwingung. Wobei der Abfall über γ von dem Dämpfungskoeffizeinten α abhängt. Durch die Dämpfung ist auch die Eigenfrequenz ω der Schwingung niedriger.

Kriechfall: starke Dämpfung $\boldsymbol{\gamma > \omega_0}$ Da der Radikant positiv ist, ist λ immer reell und mit $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ folgt:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t} \left(C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{\omega t} \right) \tag{9}$$

C_1 und C_2 werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.
Die Schwingung kommt also fast sofort zum Stillstand.

Aperiodischer Grenzfall: optimale Dämpfung $\boldsymbol{\gamma = \omega_0}$ Hier liefert der Exponentialansatz also nur eine Lösung jedoch findet man noch eine weitere Lösung[2] und es ergibt sich:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t} \left(C_3 + t \cdot C_4 \right) \tag{10}$$

Der Aperiodische Grenzfall ist von besonderer Bedeutung, da hier die Dämpfung so ist, dass die Schwigung am schnellsten zum Stillstand kommt.

Nun kann noch von außen eine Anregung geschehen. Es handelt sich dann um eine Erzwungene Schwingung.
Die Differentialgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = k\cos(\Omega t) \tag{11}$$

wobei $k = {}^{M_0}/_{I}$ und $M_0 \cos(\Omega t)$ die anregende Schwingung ist.
Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist die Addition der homogenen Lösung (je nach Dämpfung eine der drei oben genannten Fälle) mit eine speziellen Lösung. Da uns jedoch ein gedämpftes System vorliegt klingt die homogene Lösung mit der Zeit ab und es bleibt für lange Zeiten nur die spezielle Lösung als allgemeine Lösung zurück.

Um nun diese spezielle Lösung zu finden, erweitern wir das Problem ins Komplexe. Die Anregung lautet somit $k \cdot \exp(\Omega t)$. Da es sich um eine lineare Differentialgleichung handelt können wir dann einfach den Realteil der komplexen Lösung als Lösung unserer

[2] Da es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung handelt besteht die allgemeine Lösungen aus zwei Teillösungen.

ursprünglichen Gleichung betrachten.
Wir wählen folgenden Ansatz

$$\varphi_k(t) = A^* \cdot e^{i\Omega t} \tag{12}$$

und erhalten:

$$A^* = \frac{k}{-\Omega^2 + i2\gamma\Omega + \omega_0^2} \tag{13}$$

Da A^* komplex ist, kann man es in der Form $|A^*|e^{i\Psi}$ aufschreiben. Der Realteil unserer komplexen Lösung ist dann

$$\varphi(t) = |A^*| \cos(\Omega t + \Psi) \tag{14}$$

Es ergibt sich:

$$|A^*| = \frac{k}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \tag{15}$$

und für die Phasenverschiebung

$$\Psi = \arctan \frac{\operatorname{Im} A^*}{\operatorname{Re} A^*} = \arctan \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = -\arctan \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \tag{16}$$

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung hängt also nicht von der Zeit aber von der Erregerfrequenz ab. Außerdem vollzieht sich die erzwungene Schwingung mit der gleichen Frequenz mit der auch die Anregung geschieht, jedoch ist sie um Ψ verschoben. Das System hängt mit seiner Schwingung immer der anregenden Schwingung hinterher bzw. ist höchstens in Phase mit ihr (für sehr kleine Frequenzen), also $\Psi \leq 0$.

Für $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ wird die Amplitude der erzwungenen Schwingung maximal es tritt also Resonanz auf.

Ein schwingendes System wandelt seine Energie abwechselnd in potentielle und kinetische Energie um. Jedoch wird durch die Dämpfung Energie nach außen abgegeben (z.B.: Wärme) und geht somit dem System verloren. Zur Beschreibung eines oszillierenden Systems wird also häufig der Gütefaktor Q verwendet.

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} \tag{17}$$

Außerdem kann man ein Schwingendes System über die Breite seiner Resonanzkurve charakterisieren. Die Bandbreite $\Delta\omega$ ist die Differenz der Frequenzen mit Amplitude $^{A_{res}}/\sqrt{2}$. Es gilt auch $\Delta\omega \approx 2\gamma = {}^{\omega_0}/_{Q}$

CASSY

Das CASSY (Computer Aided Science System) bietet die Möglichkeit über zwei Eingangskanäle des SENSOR-CASSY Moduls Messungen mit vorgegbenem Messbereich und Schrittweite durchzuführen, und diese mit der CASSY-Lab Software weiter zu verarbeiten (Umrechnen, differenzieren, FFT[3], etc.) und graphisch darzustellen.
Mithilfe der BMW-Box können auch Wegstrecken gemessen werden.
Mit dem POWER-CASSY Modul ist auch ein Funktionsgenerator integriert.

1 Drehpendel, freie Schwingungen

In diesem Versuch wird eine freie ungedämpfte Schwingung des Pohlschen Rades betrachtet.

Unter Verwendung der BMW-Box kann mit dem CASSY eine Wegstrecke gemessen werden. Mit Hilfe der Umrechnung $\phi = {}^{s}/_{r}$ (r ist der Radius des Pohlschen Rades) erhält man den Winkel. Diesen kann man auch differenzieren lassen. So erhält man im CASSY eine Darstellung des zeitlichen Verlaufs dieser Größen.
Man kann diese beiden Größen auch gegeneinander auftragen. Man erhält eine Phasenraumdarstellung.
Für die kinetische Energie gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\varphi} \tag{18}$$

Um diese Umrechnung mit CASSY durchführen zu können, benötigen wir eine Abschätzung für des Trägheitsmoment der Massescheibe des Pohlschen Rades. Dazu vernachlässigen wir die Speichen der Massescheibe und betrachten sie als Hohlzylinder. Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders berechnet sich mit

$$I_{Hohlz} = \frac{1}{2} m(r_i^2 + r_a^2) \tag{19}$$

[3] effiziente Variante der Durchführung einer diskreten Fourier-Transformation

Mit den Angaben auf dem Aufgabenblatt zu den Maßen des Pohlschen Rades ergibt sich:

$$m = \varrho \cdot \pi(r_a^2 - r_i^2)d \approx 191,4g = 0,1914kg \qquad \rightarrow \qquad I = 1,4 \cdot 10^{-3}kgm^2 \tag{20}$$

Nun kann auch der zeitliche Verlauf der kinetischen Energie dargestellt werden.

Obwohl die Wirbelstrombremse nicht verwendet wird, liegt doch eine Dämpfung vor. Diese resultiert aus der Luftreibung und der Reibung der Massescheibe mit ihrer Lagerung. Unter der Annahme, dass es sich um eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung handelt, wissen wir, dass die Dämpfung durch eine Exponentialfunktion ($c \exp(-\gamma t)$) zu beschreiben ist. Denn in allen drei oben beschriebenen Fällen war es so. Da die Dämpfung nur sehr klein ist, handelt es sich hier natürlich um den Schwingfall.

2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Nun soll der zeitliche Verlauf des Auslenkungswinkels bei verschiedenen Strömen I_B durch die Wirbelstrombremse aufgezeichnet werden. Wie in der vorherigen Aufgabe soll wieder eine Kurve, welche die Dämpfung beschreibt angepasst werden um so γ zu bestimmen.
Nun soll γ auch aus dem Dämpfungsverhältnis bestimmt werden. Das Dämpfungsverhältnis k bezeichnet das Verhältnis zweier Amplituden der Schwingung, die eine Periodendauer auseinanderliegen. Somit gilt also $k = \exp(\gamma T)$.
Auf dem Aufgabenblatt sind zwei Formeln zur Bestimmung von k aus n Schwingungen angegeben:

$$k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \qquad \text{und} \qquad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}} \tag{21}$$

Die erste Formel stellt einen arithmetischen Mittelwert dar. Durch Anwendung dieser Formel werden statistische Fehler minimiert. Damit der Effekt gut sichtbar ist, also der Abfall deutlich größer ist als der Ablesefehler, müssen vor allem bei niedrigen Dämpfungen recht viele Schwingungen betrachtet werden. So wird es sehr aufwendig sein diese Formel anzuwenden.
Zweckmäßiger erscheint also die Verwendung der zweiten Formel. Mit ihr kann über recht viele Schwingungen mit wenig Aufwand k bestimmt werden.

Da es sich bei diesen Schwingungen nur schwach gedämpft sind (Schwingfall), gilt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}} \tag{22}$$

Da im Schwingfall $\gamma < \omega$ gilt und $\omega < \omega_0$ gilt, ist bei sehr kleinen Dämpfungen $\gamma/\omega_0 \ll 1$. Somit ist die Periodendauer nahezu unabhängig von der Dämpfung und somit von I_B. In den ermittelten Werten für γ ist die gesamte Dämpfung enthalten, Wirbelstrombremse und Luft- und Lagerreibung. Man kann also den in der ersten Aufgabe ermittelten Wert für die Dämpfung ohne Wirbelstrombremse von den hier ermittelten Werte abziehen, um den Wert der Dämpfungskonstanten zu erhalten, die nur von der Wirbelstrombremse herrührt.

$$\gamma_{korr}(I_B) = \gamma(I_B) - \gamma(0) \tag{23}$$

Diese Dämpfung ist proportional zur Leistung der Wirbelstrombremse und somit auch zu I_B^2:

$$\gamma_{korr} \propto P_B = U \cdot I_B = R \cdot I_B^2 \tag{24}$$

Da die Spannung bei verschiedenen Strömen nicht gleich sein muss, gilt also

$$\gamma_{korr} = \text{const.} I_B^2 \tag{25}$$

Aus einer graphischen Darstellung von $\gamma_{korr}(I_B)$ kann man also die Konstante bestimmen und somit den I_B Wert für die Grenzdämpfung berechnen.

$$I_B = \sqrt{\frac{\omega_0}{\text{const.}}} \tag{26}$$

Es ist zu erwarten, dass der experimentell ermittelte Wert etwas niedriger liegt, da zu γ_{korr} noch die Dämpfung durch Luft- und Lagerreibung hinzukommt.

Für die Güte des Systems gilt:

$$Q = \frac{2\pi\varphi^2(t)}{\varphi^2(t) - \varphi^2(t+T)} = \frac{2\pi e^{-2\gamma t}}{e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T}} \tag{27}$$

Für $\gamma T \ll 1$ gilt mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgende Näherung:

$$Q \approx \frac{2\pi}{2\gamma T} = \frac{\omega}{2\gamma} \tag{28}$$

3 Drehpendel, Winkelrichtgröße D^*

Wie schon in der Vorbemerkung angesprochen, gilt:

$$D^* \cdot \varphi = M \tag{29}$$

Wenn eine Kraft senkrecht zum Hebelarm wirkt, gilt für ein Drehmoment auch:

$$M = F \cdot r \tag{30}$$

Wenn nun eine definierte Kraft senkrecht an der Massescheibe des Pohlschen Rades angreift (Messung mit Federkraftmesser) wird diese ausgelenkt. Rücktreibende (Gleichung (29)) und angelegte Kraft (Gleichung (30)) gleichen sich aus. Man kann also aus der angelegten Kraft D^* bestimmen.

Außerdem wurde in den Vorbemerkungen festgestellt:

$$D^* = \omega_0^2 \cdot I \tag{31}$$

Da wiederum kaum Dämpfung vorliegt, können wir aus dem bekannten T_0 auch $\omega_0 = {}^{2\pi}/_{T_0}$ berechnen. Somit können wir das Trägheitsmoment I der Massescheibe bestimmen.

4 Drehpendel, erzwungene Schwingung

In der Vorbemerkung ist die erzwungene Schwingung schon diskutiert worden.
Für die Phasenverschiebung Ψ zwischen der anregenden Schwingung und der Schwingung des Systems ist folgendes zu erwarten: für kleine Frequenzen ($\Omega \ll \omega_0$) schwingen sie in Phase ($\Psi = 0$), in der Resonanz ($\Omega = \omega_0$) ergibt sich $\Psi = {}^{-\pi}/_{2}$ und für große Frequenzen ($\Omega \gg \omega_0$) schwingen sie entgegengesetzt ($\Psi = -\pi$).

Zur Bestimmung der Güte aus den Resonanzkurven kann man die Bandbreite verwenden (siehe Vorbemerkungen).

5 Serienschwingkreis

Ein Serienschwingkreis besteht aus in Reihe geschalteter Spule (Induktivität L), Kondensator (Kapazität C) und Widerstand R. An dieses System wird eine Wechselspannung angelegt.

Mit der Kirchhoffschen Maschenregel ergibt sich:

$$U(t) = U_L(t) + U_C(t) + U_R(t) \tag{32}$$

Nach Einsetzen der den Bauteilen ensprechenden Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom erhält man:

$$U(t) = L \cdot \dot{I} + \frac{1}{C} \cdot \int I(t)dt + R \cdot I \tag{33}$$

Durch Differenzieren und Umformen erhält man die schon in den Vorbemerkungen gelöste Gleichung für den gedämpften getriebenen harmonischen Oszillator:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = \frac{1}{L}\dot{U} \tag{34}$$

wobei man ablesen kann, dass für die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems gilt $\omega_0 = {}^1\!/\!\sqrt{LC}$, $k = {}^{U_o\omega}\!/\!{}_L$ und für den Dämpfungskoeffizienten $\gamma = {}^R\!/\!{}_{2L}$. Da die Gleichung exakt analog ist, ist die Lösung bekannt. Sie besteht wieder aus der Kombination der homogenen und einer speziellen Lösung, wobei nach längerer Zeit wieder die spezielle Lösung alleine das Problem beschreibt.
Es können wieder Amplitude und Phasenverschiebung angegeben werden:

$$I_0 = \frac{U_0\omega}{L\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + 4\omega^2(\frac{R}{2L})^2}} \tag{35}$$

$$\Psi = \arctan \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \tag{36}$$

Durch umformen erhält man auch, dass gilt

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} \tag{37}$$

wobei Z die Gesamtimpedanz des Schwingkreises darstellt.

Zur Analyse des Schwingungsverhaltens werden die Spannungen über Spule und Kondensator mit dem SENSOR-CASSY gemessen. Als Wechselspannungsquelle wird das POWER-CASSY verwendet, dadurch sind alle weiteren benötigten Größen (z.B.:auch der Strom in der Schaltung) bekannt.

Der Gütefaktor $Q = {}^1\!/_R \cdot \sqrt{{}^L\!/_C}$ kann analog zum Drehpendel über die Bandbreite bestimmt werden. Außerdem ist es aber auch möglich ihn über die Spannungen an Spule oder Kondensator im Resonanzfall zu bestimmen.

$$|U_L(\omega_0)| = |U_C(\omega_0)| = Q \cdot U_0 \tag{38}$$

Da der Gütefaktor auch große Werte annehmen kann, sieht man, dass im Resonanzfall an Spule und Kondesator deutlich höhere Spannungen anliegen können, als von der Wechselspannungsquelle generiert werden.

6 Quellen

- Vorbereitungshilfe
- LEYBOLD DIDACTIC GmbH: Gebrauchsanweisung 34600 Drehpendel nach Pohl
- Christopher Jung: Schwingungen und das Pohl'sche Rad, 2004
- Abbildung 1 wurde entnommen aus LEYBOLD DIDACTIC GmbH: Gebrauchsanweisung 34600 Drehpendel nach Pohl