

Auswertung

Resonanz
Versuch P1 12, 22

Iris Conradi, Melanie Hauck
Gruppe Mo-02

13. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Drehpendel, freie Schwingungen	3
2	Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung	7
3	Drehpendel, Winkelrichtgröße D^*	11
4	Drehpendel, erzwungene Schwingungen	11
5	Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung	13

1 Drehpendel, freie Schwingungen

Um die Massescheibe des Drehpendels war ein Faden gewickelt, der in einen Sensor eingeführt war. Dieser Sensor war mit der BMW-Box verbunden. Wie in der Vorbereitung beschrieben, wurde also der Winkel über die Wegstreckenmessung am Faden bestimmt. Zunächst haben wir die benötigten Größen und Darstellungen in CASSY definiert. Wir haben das Drehpendel ausgelenkt und die Messung gestartet. CASSY erstellte nun Wertetabellen über den zeitlichen Verlauf von Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Energie.

Nun haben wir die Wertetabelle für den zeitlichen Verlauf des Winkels mit RooFiLab darstellen lassen. Wie man schon am Verlauf der Messpunkte sehen kann, handelt es sich um eine schwach gedämpfte Schwingung. Wir verwendeten also zum Fitten die Lösung des Schwingfalls.

$$\varphi(t) = a \cdot \cos(\omega t + c) \cdot e^{-\gamma t} \quad (1)$$

Der Fit wurde mit der χ^2 -Methode durchgeführt.

Die daraus resultierende Darstellung ist in Abbildung 1a zu sehen. Der Fit ergab:

- $\chi^2 = 0,283287$
- $a = 0,8752rad$
- $\omega = 3,22rad/s$
- $\gamma = 0,094911/s$
- $c = -1,392rad$

Zusätzlich sollte noch ein fit-by-eye durchgeführt werden. Wir haben uns in RooFiLab die Messpunkte und eine Funktion der Form $a \cdot \exp(-\gamma t)$ anzeigen lassen. Durch Verändern der Parameter haben wir versucht, eine passende Einhüllende für die Schwingung zu finden. Durch Verändern von a wird der y-Achsenabschnitt verschoben. Bei großem γ wird der Abfall der Funktion steiler.

Es war nicht möglich alle Maxima durch eine Exponentialfunktion zu verbinden. Die Dämpfung die das System durch Lager- und Luftreibung erfährt ist also nicht exakt geschwindigkeitsproportional, wie es aber bei exponentieller Dämpfung angenommen wird (siehe Vorbereitung). Jedoch konnten wir immer Gruppen von Maxima recht gut verbinden:

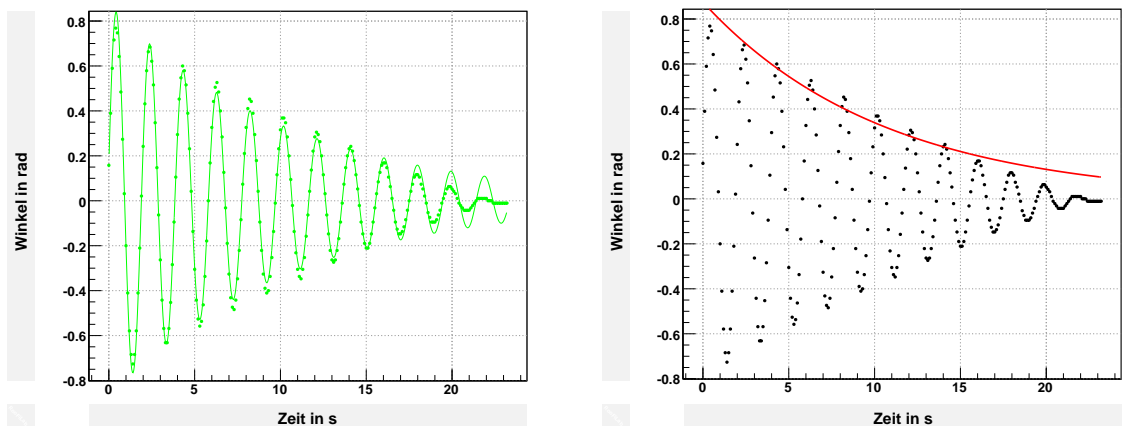
Perioden 1-5 $a = 0,82rad$ und $\gamma = 0,071/s$

Perioden 5-8 $a = 1,02rad$ und $\gamma = 0,11/s$

Perioden 8-10 $a = 2,9rad$ und $\gamma = 0,181/s$

Die Exponentialfunktion für die Perioden 8-10 hat jedoch im Anfangsbereich garnicht zu den Messwerten gepasst, Perioden 11 und 12 ließen sich durch eine Exponentialfunktion nicht mit den anderen Maxima verbinden. Die Werte für den Dämpfungskoeffizienten der Perioden 1-8 passen zu dem Ergebnis aus dem Fit. Daher werden wir diesen Wert im Folgenden verwenden.

In Abbildung 1b ist die Einhüllende mit den Werten aus dem Fit dargestellt.



(a) zeitlicher Verlauf des Winkels

(b) Einhüllende

Abbildung 1: Winkel-Zeit-Darstellung

Analog haben wir eine Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Winkelgeschwindigkeit erstellt. Hierzu verwendeten wir als Fit-Funktion die Ableitung der Lösung des Schwingfalls:

$$\dot{\varphi}(t) = e^{-\gamma t}(-a^2\gamma \cos(\omega t + c) - a\omega \sin(\omega t + c)) \quad (2)$$

Der Fit ergab den in Abbildung 2 dargestellten Graph und die folgenden Parameter:

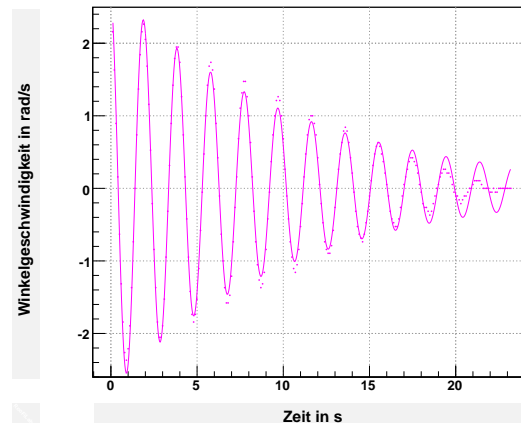


Abbildung 2: zeitlicher Verlauf der Winkelgeschwindigkeit

- $\chi^2 = 2,88136$
- $a = 0,8625rad$
- $\omega = 3,22rad/s$
- $\gamma = 0,095021/s$
- $c = -1,39rad$

Diese Werte passen gut zu den Werten aus dem Fit zur Winkel-Zeit-Darstellung.

Analog haben wir auch eine Darstellung des zeitlichen Verlaufs der kinetischen Energie erstellt. Hierzu leiteten wir die Fit-Funktion aus der in der Vorbereitung genannten Formel für die Energie ab:

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-2\gamma t}(-a^2\gamma \cos(\omega t + c) - a\omega \sin(\omega t + c))^2 \quad (3)$$

Der Fit ergab den in Abbildung 3 dargestellten Graph und die folgenden Parameter:

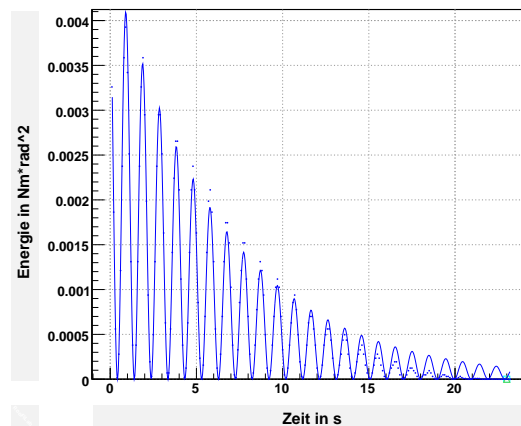


Abbildung 3: zeitlicher Verlauf der Energie

- $\chi^2 = 1,87725 \cdot 10^{-6}$
- $a = 0,8072rad$
- $\omega = 3,22rad/s$
- $\gamma = 0,077731/s$
- $c = -1,372rad$

Man sieht, dass die kinetische Energie mit der gleichen Frequenz wie die Auslenkung oszilliert. Sie pendelt zwischen einem Höchstwert und Null. Daran erkennt man, dass die Energie der Schwingung periodisch in kinetische und potentielle Energie umgewandelt wird.

Diese Werte passen wiederum recht gut zu den Werten aus dem Fit zur Winkel-Zeit-Darstellung.

In allen Größen sieht man also deutlich den Einfluss von Luft- und Lagerreibung in Form von Dämpfung. Dies wird nochmals in der Phasenraumdarstellung deutlich, denn wenn keine Dämpfung vorhanden wäre, würde sich in dieser Darstellung nur ein Kreis ergeben. In Abbildung 4 ist jedoch eine Spirale zu erkennen. Bei der Aufnahme der Messdaten war in CASSY schön zu sehen, wie sich die Spirale zum Ursprung hin aufgebaut hat.

Abbildung 4a zeigt die Messpunkte in RooFiLab. Zur Verdeutlichung der zeitlichen Abfolge der Messpunkte haben wir mit TikZ die Werte durch eine Linie verbunden (Abbildung 4b).

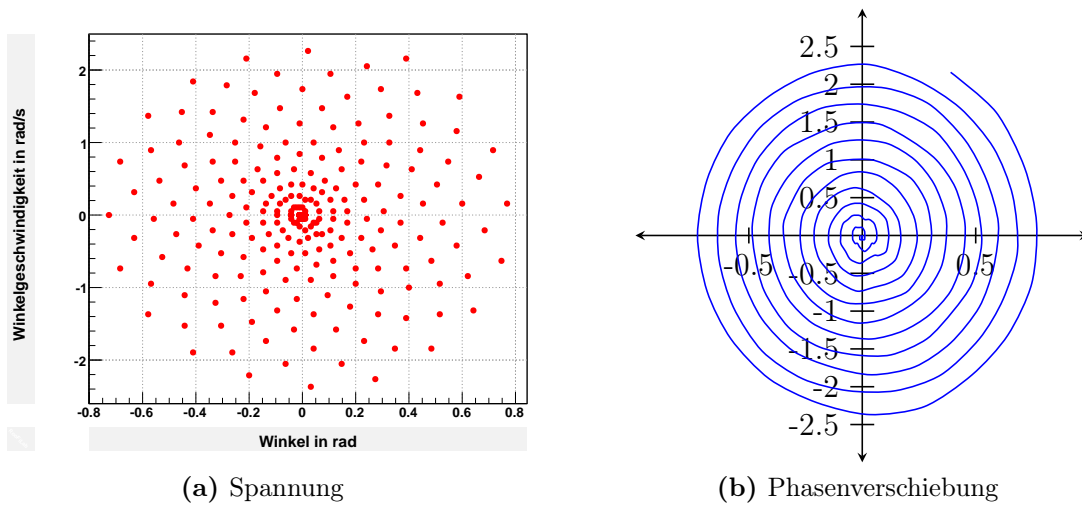


Abbildung 4: Phasenraumdarstellung

In der Aufgabe soll zudem die Periodendauer der Schwingung bestimmt werden. In allen Fits ergab sich exakt die selbe Kreisfrequenz der Schwingung. Aus dieser lässt sich die Periodendauer berechnen:

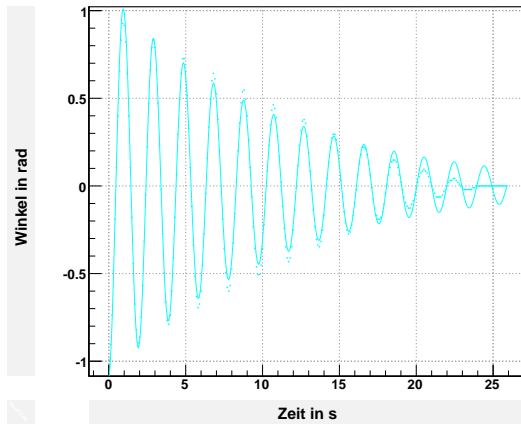
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,95s \quad (4)$$

Dieses Ergebnis passt zu dem, was man anhand der obigen Kurvenverläufe auch abschätzen kann.

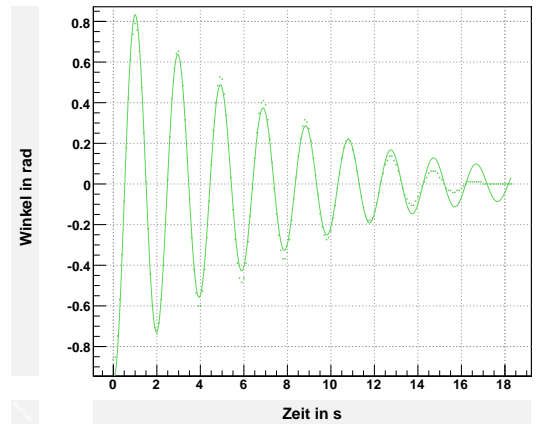
2 Drehpendel, freie gedämpfte Schwingung

Wir haben nun bei vier verschiedenen Strömen durch die Wirbelstrombremse Winkel-Zeit-Diagramme aus den mit CASSY erstellten Wertetabellen darstellen lassen. Sie sind in Abbildung 5 zu sehen. Wir haben sie mit der schon in Aufgabe 1 für die Winkel-Zeit-Darstellung verwendeten Fitfunktion gefittet. Die Ergebnisse der Fits sind in Tabelle 1 zu finden.

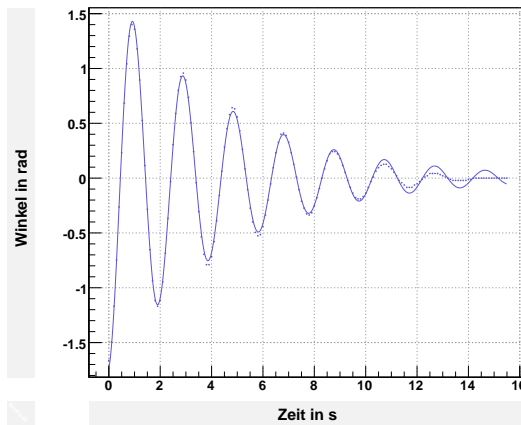
Man sieht also, dass die Dämpfung mit steigendem Strom stärker wird, die Schwingungen also schneller abklingen. Außerdem sieht man den Einfluss der Dämpfung auf die



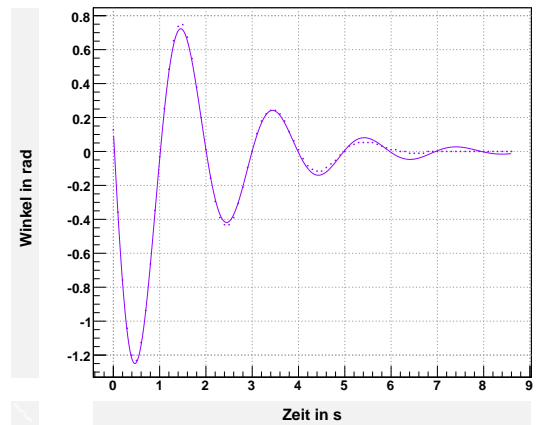
(a) zeitlicher Verlauf des Winkels bei $I_B = 100mA$



(b) zeitlicher Verlauf des Winkels bei $I_B = 200mA$



(c) zeitlicher Verlauf des Winkels bei $I_B = 400mA$



(d) zeitlicher Verlauf des Winkels bei $I_B = 700mA$

Abbildung 5: Winkel-Zeit-Darstellung bei verschiedenen Dämpfungen

I_B in mA	χ^2	a in rad	c in rad	ω in rad/s	γ in $1/s$
100	0,516035	-1,102	0,09833	3,211	0,09268
200	0,229574	-0,956	-0,1193	3,207	0,1363
400	0,14549	-1,75	0,1345	3,204	0,2176
700	0,0279158	1,641	1,492	3,171	0,5522

Tabelle 1: Ergebnisse der Fits

Eigenfrequenz (siehe Vorbereitung). Sie sinkt im Vergleich zur Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators. Jedoch ist die Veränderung der Eigenfrequenz nur sehr gering, sodass sich auch die Periodendauer kaum verändert. Dies passt zu den in der Vorbereitung formulierten Erwartungen. Die Werte von a und c sind nicht vergleichbar, da wir unterschiedlich ausgelenkt haben und die Messung zu unterschiedlichen Zeitpunkten begonnen wurde.

Irritierend ist der Umstand, dass der Dämpfungskoeffizient bei $I_B = 100mA$ kleiner ist

I_B in mA	100	200	400	700
Auwahl	1. und 9. Max.	1. und 7. Max.	1. und 6. Max	1. und 3. Min
φ_0 in rad	0,9263157895	0,7894736842	1,4	-1,231578947
φ_n in rad	0,2210526316	0,1368421053	0,1263157895	-0,1157894737
k	1,1961425	1,3392233	1,61783445	3,261343
γ in $1/s$	0,091847	0,14978964	0,246712	0,606225
γ_{korr} in $1/s$	$-3,063 \cdot 10^{-3}$	0,05487964	0,151802	0,511315

Tabelle 2: Dämpfungsverhältnis

als der Wert in Aufgabe 1. Eigentlich müsste die Dämpfung durch Luft- und Lagerreibung und eine weitere Dämpfung durch die Wirbelströme zu erkennen sein. Wir können uns dies nicht erklären. Jedoch ist wahrscheinlich bei $I_B = 100mA$ die zusätzliche Dämpfung sehr gering und so entsteht dieses Problem durch Messfehler und Fehler die beim Fitten entstehen.

Nun berechnen noch das Dämpfungsverhältnis. Dazu lesen wir die Werte für verschiedene Maxima aus den Wertetabellen ab und verwenden die Formel, für die wir uns schon in der Vorbereitung entschieden haben. Um nun aus dem daraus γ zu errechnen, verwenden wir die Formel aus der Vorbereitung. Für T setzten wir den Wert aus Aufgabe 1 ein, da er fast unabhängig von I_B ist (siehe oben).

Da wir schon in der Aufgabe 1 festgestellt haben, dass es kein exakter exponentieller Abfall ist, was sich vorallem in den letzten Perioden bemerkbar macht, achten wir bei

der Auswahl der Messpunkte darauf diese letzten Perioden nicht mit einzubeziehen. Tabelle 2 zeigt die Werte für k , γ und γ_{korr} .

Abbildung 6 zeigt den Plot ($\chi^2 = 0,000521224$) zur Bestimmung von $const..$ Der kleine

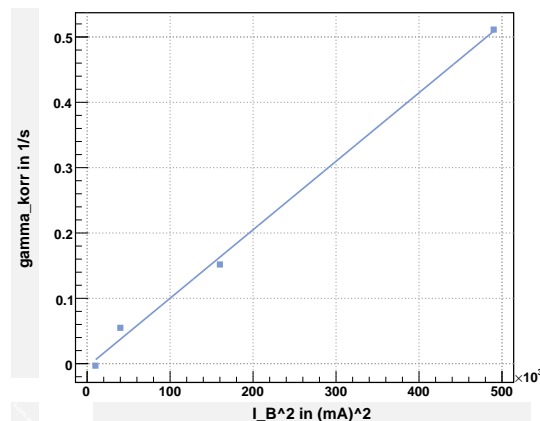


Abbildung 6: Bestimmung von $const.$

y-Achsenabschnitt ist auf das oben schon angesprochene Problem mit der Dämpfung bei $I_B = 100mA$ zurückzuführen. Als Steigung ergibt sich $const = 1,048 \cdot 10^{-6} 1/s(mA)^2$. Somit ergibt sich für die Grenzdämpfung ($\gamma = \omega_0$) folgender Strom: $I_{B,Grenz} = 1,7529A$.

Zur experimentellen Bestimmung des Grenzstroms verwendeten wir das Intervallhalbierungsverfahren. Hierzu stellten wir abwechselnd große und kleine Ströme ein und überprüften wann Kriechfall und wann Schwingfall eintritt. Dazwischen muss der aperiodische Grenzfall auftreten. Unsere Einschätzung ergab, dass der Grenzstrom zwischen $1,5A$ und $1,6A$ liegt.

Die beiden Werte für den Grenzstrom sind recht ähnlich. Da nicht immer die gleiche Auslenkung garantiert werden konnte, war es aber schwer den Grenzstrom zu messen. Aber die Rechnung liefert auch keinen sehr guten Wert, da beispielsweise das oben schon angesprochene Problem mit der Dämpfung bei $I_B = 100mA$ vorliegt.

In Tabelle 4 sind die Werte für die Güte bei den verschiedenen Dämpfungen aufgeführt. Der erste ist negativ, da ja leider γ_{korr} negativ geworden ist. Die verwendete Formel gilt jedoch nur für $\gamma T \ll 1$. Dies wird jedoch mit zunehmendem Strom weniger erfüllt. Für $I_B = 700mA$ gilt $\gamma T \approx 1$. Dieser Wert ist also so nicht korrekt. Jedoch kann man sehen, dass die Güte mit steigender Dämpfung abnimmt.

I_B in mA	100	200	400	700
Q in rad	-525,63	29,34	10,61	3,15

Tabelle 3: Güte

3 Drehpendel, Winkelrichtgröße D^*

Als Kraft zur Bestimmung von D^* verwendeten wir die Gewichtskraft eines 15g schweren Klötzchens, dass wir an dem schon vorhandenen Faden befestigten. Es ergibt sich:

$$D^* = \frac{mgr^2}{s} \approx 0,187Nm \quad (5)$$

Dabei bezeichnet s die am Pohlschen Rad abgelesene Auslenkung, sie beträgt $7,1 \cdot 10^{-3}m$, $r = 0,095m$ ist der Radius des Pohlschen Rades.

Daraus berechnet sich, wie in der Vorbereitung beschrieben das Trägheitsmoment:

$$I = \frac{D^*}{\omega_0^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-2}kgm^2 \quad (6)$$

Dies unterscheidet sich um etwa eine Größenordnung von dem in der Vorbereitung abgeschätzten Wert. Die Abschätzung in der Vorbereitung ist aber auch recht grob, da der Einfluss der Speichen der Massescheibe vollständig vernachlässigt wurde.

4 Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Um die Resonanzkurven aufzunehmen, haben wir bei konstanter Dämpfung verschiedene Motordrehzahlen eingestellt. Nach dem Einschwingvorgang haben wir die Periodendauer abgemessen und daraus die Frequenz errechnet. Außerdem haben wir die Spitze-Spitze-Auslenkung abgelesen und diese durch 2 geteilt um die Auslenkung zu erhalten. Da die Auslenkung bei langsamen Drehzahlen nicht um 0 symmetrisch war, erwies sich dies als sinnvoll.

Das Ende des Einschwingvorganges konnte man an zwei Darstellungen im CASSY erkennen. In der Phasenraumdarstellung haben sich die Werte nach dem Einschwingvorgang nurnoch auf einem Kreis bewegt. In der Winkel-Zeit-Darstellung blieb die Amplitude

dann konstant.

Die Resonanzkurven haben wir nach der Formel für $|A^*|$ gefittet, also:

$$|A^*| = \frac{k}{\sqrt{(3,22^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad (7)$$

Die Ergebnisse der Fits sind in Tabelle ?? zu sehen.

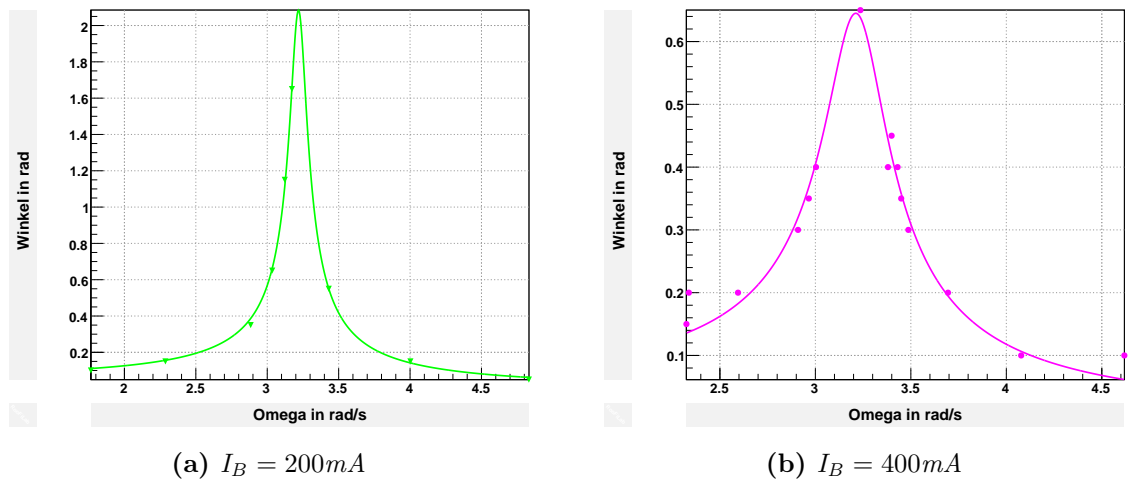


Abbildung 7: Resonanzkurven

I_B in mA	χ^2	γ in $1/s$	k in $1/s^2$
200	0,00320431	0,05989	0,8039
400	0,010792	0,1643	0,6815

Tabelle 4: Ergebnisse der Resonanzfits

Hierbei fällt auf, dass die hier ermittelten Werte für γ recht gut den Werten für γ_{korr} aus Aufgabe 2 entsprechen. Wir nehmen an das $\gamma(0)$ hauptsächlich durch die Lagerreibung entsteht, die Luftreibung also verhältnismäßig klein ist (keine großen Flächen an der Massescheibe). Wir vermuten also, dass unter der Anregung die Lagerreibung kleiner ist. Jedoch können wir uns nicht erklären warum genau dies geschieht.

An der Luftreibung kann sich nichts ändern. Die ermittelten Werte sind nur leicht größer als die Werte für γ_{korr} . Daher scheint unsere Vermutung sinnvoll.

Außerdem sieht man, dass sich die theoretische Form der Resonanzkurve gut an unsere Messwerte anpassen lässt (χ^2 sehr klein).

Die Anzahl der Messwerte bei der Messreihe mit 200mA ist kleiner als bei 400mA, da die Einschwingvorgänge dort sehr lange andauerten. Bei manchen Einstellungen der Anregung war kein Abklingen der homogenen Lösung erkennbar, sodass wir diese Messreihe abbrechen.

Am Pohlschen Rad gibt es die Möglichkeit mit Hilfe zweier Zeiger die Phasenverschiebung zwischen Anregung und erzwungener Schwingung zu beobachten. In der Vorbereitung haben wir bereits beschrieben wie der Verlauf dieser Phasenverschiebung (nach dem Einschwingvorgang) bei verschiedenen Anregungsfrequenzen aussieht. Genau so konnten wir es auch beobachten. Wir konnten also sehen, dass die Zeiger bei niedrigen Frequenzen etwa in Phase geschwungen haben. Mit steigender Frequenz verzögerte sich die Schwingung des Massenrades im Vergleich zur Anregung zusehends. Besonders gut sehen konnte man das gegenphasige Schwingen bei hohen Frequenzen.

Anhand der in Abbildung 7 gezeigten Resonanzkurven soll die Güte bestimmt werden. Wir haben die Güte über die Bandbreite bestimmt (siehe Vorbereitung). Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zu sehen. Man kann wieder erkennen, dass schärfere Resonanzkurven eine höhere Güte haben.

I_B in mA	φ_{res} in rad	Ω_1 in rad/s	Ω_2 in rad/s	Q in rad
200	2,2	3,15	3,3	21,47
400	0,65	3,05	3,4	9,2

Tabelle 5: Güte

Die in Aufgabe 2 bestimmten Werte für die Güte stimmen größenordnungsmäßig mit diesen in etwa überein. Man muss bedenken, dass beide Verfahren fehlerbehaftet sind. Beide Gleichungen für die Güte sind nicht exakt und die Bandbreite ist schwer abzulesen.

5 Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

Wie in der Vorbereitung beschrieben wurde der Schwingkreis aufgebaut und das CAS-SY konfiguriert. Dazu musste die Resonanzfrequenz berechnet werden. Es ergab sich

$\omega_o = 1/\sqrt{LC} \approx 1320,8\text{Hz}$. Nun wurde die Messung durchgeführt, dann wurde die Resonanzfrequenz abgemessen und die Formel entsprechend angepasst. Dann wurde die Messung nochmals durchgeführt. So wurde für jeden Dämpfungswiderstand vorgegangen.

Es wurden folgende Messgrößen aufgenommen: Anregungsfrequenz, Impedanz, Phasenverschiebung, Strom, angelegte Spannung U_2 , Spannung über dem Kondensator U_{B1} und Spannung über die Spule U_{A1} (jeweils Effektivwerte).

Wir haben die Messdaten in RooFiLab eingelesen und die geforderten Darstellungen erzeugt.

In Abbildung 8 sind die Darstellungen von Schwingungsamplituden und Impedanz gegen die Anregungsfrequenz für die verschiedenen Dämpfungswiderstände gezeigt. Man kann schon erkennen, dass mit steigendem Dämpfungswiderstand die Resonanzkurve breiter und flacher wird. Über das Ablesen der Bandbreite kann man wieder die Güte bestimmen. Auch darin bestätigt sich diese Beobachtung. Mit steigendem Dämpfungswiderstand wird der Wert der Güte kleiner.

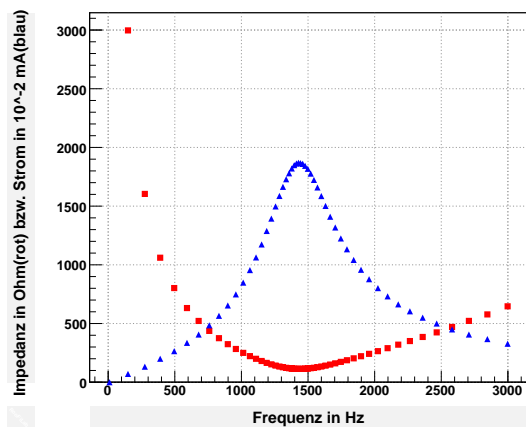
Außerdem erkennt man gut, dass die Impedanz des Schwingkreises bei der Resonanzfrequenz minimal ist.

Zudem kann die Güte mit der in der Vorbereitung angegebenen Formel aus der Resonanzüberhöhung an Kondensator oder Spule bei der Resonanzfrequenz bestimmt werden. Die zugehörigen Kurven sind in Abbildung 9 zu sehen. Aus diesen Kurven wurden die Spannungswerte bei der Resonanzfrequenz abgelesen.

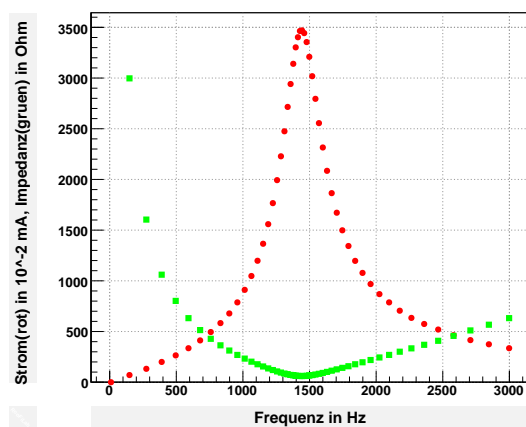
Die Werte für die Güte sind in Tabelle 6 zu finden. Eine Auflistung der abgelesenen Größen ist an das Messprotokoll angeheftet.

Die Abbildung 9 spiegelt auch die starke Frequenzabhängigkeit der Impedanzen von Spule und Kondensator wider. Bei Gleichspannung (0Hz) ist die Impedanz des Kondensators unendlich groß, die der Spule jedoch Null, sodass die gesamte angelegte Spannung über dem Kondensator abfällt. Für sehr große Frequenzen verhält es sich genau umgekehrt. In der Nähe der Resonanzfrequenz ist die erwartete Spannungsüberhöhung deutlich zu erkennen.

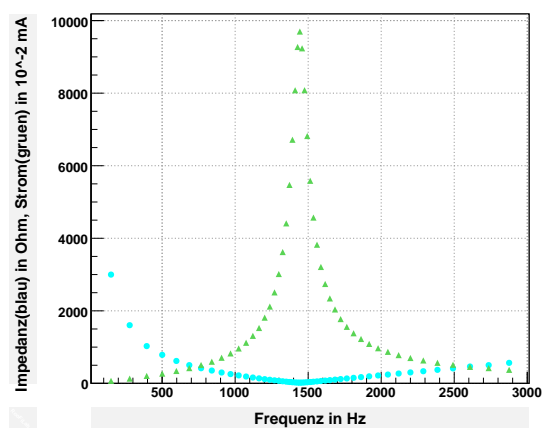
Die Phasenverschiebung in Abhängigkeit der angelegten Frequenz ist in Abbildung 10 dargestellt. Man erkennt, dass die Kurven mit sinkendem Dämpfungswiderstand einer Rechteckfunktion annähern. Außerdem entspricht der Kurvenverlauf dem der Phasenverschiebung bei dem angeregten Drehpendel. Jedoch ist die Funktion um $\pi/2$ verschoben, da in der Differentialgleichung nicht die Spannung, sondern deren zeitliche Ableitung als Anregung vorkommt.



(a) $R_p = 100\Omega$



(b) $R_p = 47\Omega$

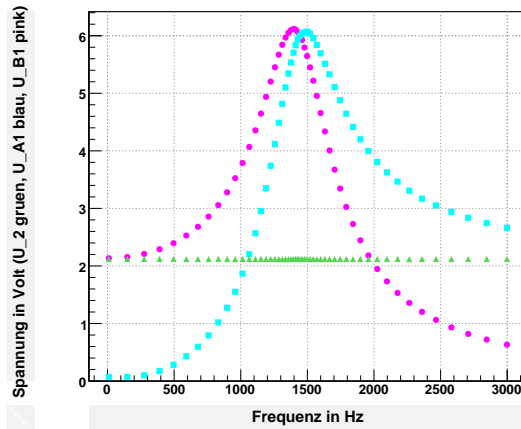


(c) $R_p = 8,2\Omega$

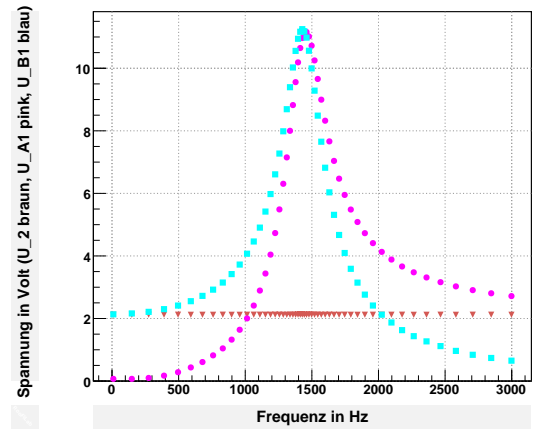
Abbildung 8: Resonanzkurven

R_p in Ω	100	47	8,2
Q aus Bandbreite	2,856	4,76	14,43
Q aus Resonanzüberhöhung	2,90	5,357	14,90

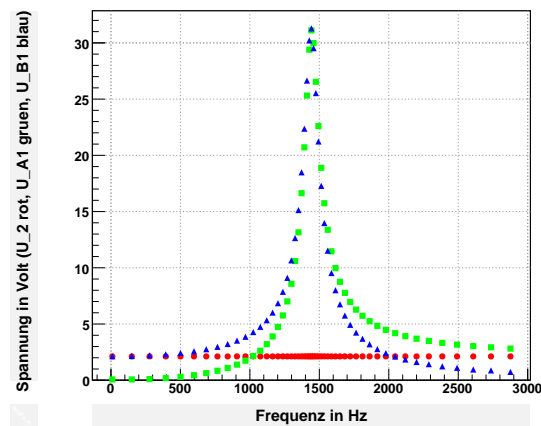
Tabelle 6: Güte



(a) $R_p = 100\Omega$

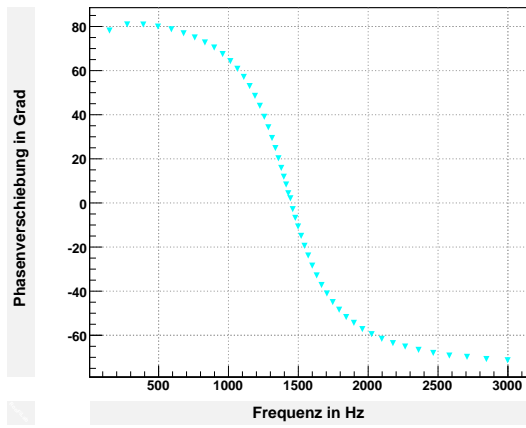


(b) $R_p = 47\Omega$

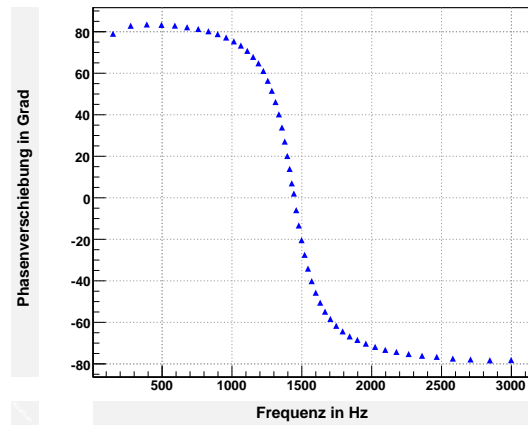


(c) $R_p = 8,2\Omega$

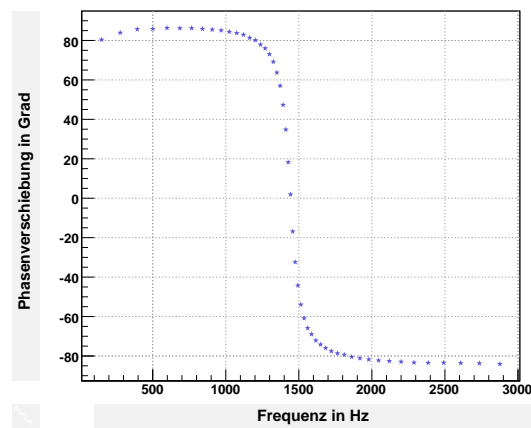
Abbildung 9: Resonanzüberhöhung



(a) $R_p = 100\Omega$



(b) $R_p = 47\Omega$



(c) $R_p = 8,2\Omega$

Abbildung 10: Phasenverschiebung