

Auswertung
mit ausführlicher Fehlerrechnung

Kreisel
Versuch P2 71, 74

Iris Conradi, Melanie Hauck
Gruppe Mo-02

26. April 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Drehimpulserhaltung	3
2 Freie Achsen	4
3 Kräftefreier Kreisel	5
4 Dämpfung des Kreisels	6
5 Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente	7
6 Hauptträgheitsmomente	9
7 Kreiselkompass	12
8 Literatur	12

1 Drehimpulserhaltung

Zur Demonstration der Drehimpulserhaltung haben wir einige Versuche mit Hilfe des Drehschemels und des Fahrradkreisels durchgeführt.

Zunächst hat die Person auf dem Drehschemel den Fahrradkreisel mit der Hand angedreht. Dabei wurde die Achse des Fahrradkreisels vertikal gehalten. Es war deutlich ersichtlich, dass sich der Drehschemel in die entgegengesetzte Richtung drehte.

Beim Andrehen des Fahrradkreisels erhielt dieser einen Drehimpuls in z-Richtung. Der Gesamtdrehimpuls des Systems aus Fahrradkreisel und Drehschemel war zu Beginn des Versuches Null. Aufgrund der Drehimpulserhaltung muss dies auch bei rotierendem Fahrradkreisel erfüllt sein. Der Drehschemel erhielt somit einen betragsmäßig gleichen aber entgegengesetzt gerichteten Drehimpuls, d.h. er drehte sich entgegengesetzt zum Fahrradkreisel.

Nun drehten wir den Fahrradkreisel um 180° . Der Drehschemel änderte seine Drehrichtung, sodass der Gesamtdrehimpuls wieder Null war.

Im folgenden Versuch übergab eine ruhende Person der Person auf dem Drehschemel den sich um die vertikale Achse drehenden Fahrradkreisel. Der Schemel drehte sich. Als wir

diesen Versuch wiederholten, drehte sich der Schemel wie erwartet nicht. Der Gesamtdrehimpuls des Systems ändert sich durch das Übergeben nicht. So muss der Drehschemel auch keine Änderung ausgleichen, da der Fahrradkreisel seine Winkelgeschwindigkeit nicht ändert.

Zusätzlich demonstrierten wir die Drehimpulserhaltung bei Änderung des Trägheitsmomentes. Dafür nahm die Person auf dem Drehschemel Gewichte in die Hände und drehte bei an den Körper angelegten Armen den Stuhl an. Nun streckte die Person die Arme weit vom Körper ab. Man konnte deutlich sehen, dass sich die Rotationsbewegung verlangsamt.

Das Ausstrecken der Arme hat das Trägheitsmoment erhöht. Wie man an Gleichung (1) in der Vorbereitung erkennen kann, musste folglich die Winkelgeschwindigkeit sinken, um den Drehimpuls konstant zu halten.

2 Freie Achsen

In Abbildung 1 sind die Maße der in diesem Versuch verwendeten Zigarrenkiste zu sehen. Auf der Mitte jeder Fläche war ein kleiner Haken angebracht. Mit diesen Haken konnte die Kiste an einem Draht aufgehängt werden. Dieser wurde von einem Motor in Rotation versetzt. Da der Draht jedoch sehr verbogen war, war es nicht möglich die Kiste störungsfrei zu drehen.

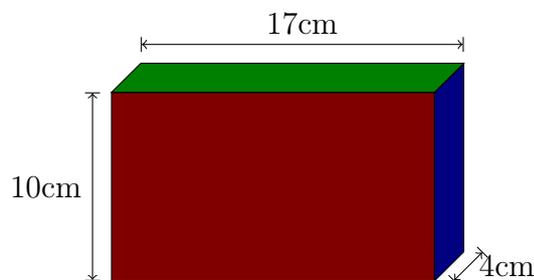


Abbildung 1: Zigarrenkiste

Wir hängten die Kiste jeweils an den verschiedenen Seitenflächen auf und beobachteten die Rotation. Als die rote Fläche nach oben zeigte, ergab sich eine stabile Rotation, jedoch war die Deckfläche der Kiste immer leicht in Richtung der Drehachse nach innen gekippt und die Kiste veränderte periodisch ihren Abstand zur Drehachse.

Als die blaue Seite nach oben zeigte, konnte man eine relativ stabile Drehung erkennen,

jedoch war die radiale Bewegung deutlich ausgeprägter.

Als die Kiste an der grünen Seite aufgehängt wurde, konnten wir nur geringe Winkelgeschwindigkeiten einstellen, da die Kiste sonst heruntergefallen ist. Bei sehr langsamer Drehung war die Drehung stabil. Doch bei höheren Winkelgeschwindigkeiten kippte die Kiste so, dass die rote Fläche nach oben zeigte. Nun drehte sich die Kiste so, als sei sie an der roten Seite aufgehängt.

Die Hauptträgheitsmomente, berechnet nach Gleichung (7) in der Vorbereitung, betragen:

$$\Theta_{rot} \approx m \cdot 32,417 \text{ cm}^2 > \Theta_{grün} \approx m \cdot 25,417 \text{ cm}^2 > \Theta_{blau} \approx m \cdot 9,667 \text{ cm}^2 \quad (1)$$

wobei m die Masse der Zigarrenkiste bezeichnet und die Farbe die Seite der Aufhängung bezeichnet.

Die Beobachtungen entsprechen den Erwartungen die wir in der Vorbereitung formuliert haben.

Die triviale Lösung Eulerschen Gleichungen konnte nicht beobachtet werden, da durch den verbogenen Draht sofort eine Störung auftrat. Da die Rotation um die mittlere Hauptachse instabil war, ging der Körper in die stabilste Rotation über, d.h. in eine Rotation um die Achse mit dem größten Hauptträgheitsmoment.

Die Rotation um das kleinste Hauptträgheitsmoment war wie erwartet am stabilsten. Da keine großen Störungen auftraten, kippte der Körper hier nicht in eine Rotation um die Achse mit dem größten Hauptträgheitsmoment.

3 Kräftefreier Kreisel

Beim Justieren des Kreisels ist uns aufgefallen, dass ein gleichzeitiges Messen der Dreh- und der Nutationsfrequenz nicht möglich war. Außerdem konnten wir nicht wie in der Vorbereitungshilfe angegeben, die Apparatur so aufbauen, dass man den Glühfaden der Lampe auf dem Inneren Kardanrahmen sehen konnte.

Die Nutationsfrequenz wurde immer nach der Drehfrequenz aufgenommen. In diesem Zeitraum fiel die Drehfrequenz jedoch weiter ab. Bei hohen Drehfrequenzen war es sehr schwer die Nutation anzuregen. So verzögerte sich die Messung der Nutationsfrequenz nochmals.

Wie man im nächsten Abschnitt sieht, ist die Dämpfung nicht linear. Sodass sich im gleichen Zeitintervall die Drehfrequenz auch um verschiedene Beträge ändert, je nachdem welche Drehfrequenz vorlag. Unabhängig davon erfolgte auch ein Ablesefehler, da wir

die Messstoppvorrichtung nicht verwenden konnten, da ansonsten die Zeitverzögerung noch größer geworden wäre.

Den Fehler durch die Zeitverzögerung können wir nicht in systematisch und statistisch trennen. Jedoch scheint es beide Anteile zu geben. Der Fehler ist immer in die gleiche „Richtung“, jedoch nicht um den gleichen Betrag. Selbst wenn es möglich wäre eine sinnvolle Abschätzung für diesen Fehler zu finden, ist es nicht zielführend ihn im Fit als rein systematischen bzw. rein statistischen Fehler zu berücksichtigen.

Da dieser Fehler nicht beziffert werden kann, ist es auch nicht sinnvoll den Ablesefehler im Fit zu berücksichtigen.

Daher haben wir uns entschieden den Fit ohne Fehlerangaben durchzuführen.

Zur Durchführung des Fits (vgl. Abbildung 2) haben wir gnuplot verwendet. Als Funktion wählten wir $f(x) = m \cdot x + b$. Es ergaben sich für die beiden Messungen folgende Ergebnisse:

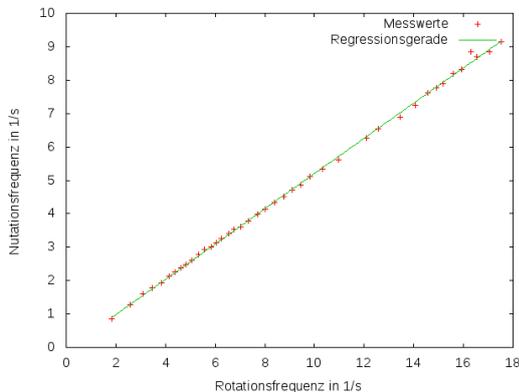
- ohne Gewichte:
 - * $m_1 = 0,526917 \pm 0,002193$
 - * $b_1 = -0,0669204 \pm 0,022351/s$
- mit Gewichten:
 - * $m_2 = 0,300214 \pm 0,001514$
 - * $b_2 = 0,0482135 \pm 0,017221/s$,

wobei die Fehlerangaben Standardabweichungen sind.

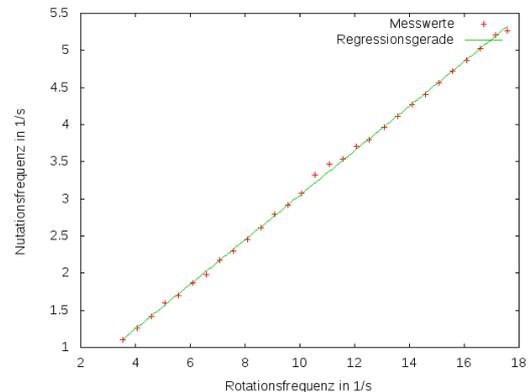
Laut der Formel (8) in der Vorbereitung erwarten wir eine Ursprungsgerade. Da b jedoch bei beiden Messungen nicht Null ist und dies auch nicht im Fehlerbereich liegt, äußert sich darin ein Anteil des systematischen Fehlers. Daher werden wir den Fehler auf die Geradensteigung im Folgenden wie einen statistischen Fehler behandeln.

4 Dämpfung des Kreisels

Wir haben den Kiesel auf etwas mehr als $331/s$ beschleunigt. Dann haben wir mittels einer Stoppuhr nach je 30s die Messstoppvorrichtung betätigt und einen Messwert für



(a) ohne Gewichte



(b) mit Gewichten

Abbildung 2: Messwerte und Regressionsgeraden

die Drehfrequenz notiert. Stoppuhr und Messstoppvorrichtung wurden von einer Person bedient, damit die Fehler durch Reaktionszeiten möglichst gering blieben.

Da die Dämpfung durch Luft- und Lagerreibung entsteht, vermuten wir, dass sie näherungsweise geschwindigkeitsproportional ist. Somit müsste sich im Diagramm eine fallende Exponentialfunktion ergeben.

In Abbildung 3a sind die Messwerte aufgetragen. Um erkennen zu können, ob es sich um eine Exponentialfunktion handeln haben wir ein Diagramm erstellt, bei dem die y-Achse mit dem natürlichen Logarithmus skaliert wurde (Abbildung 3b). Man erkennt, dass es sich nur bei hohen Drehfrequenzen um eine Gerade handelt. Somit gilt die Annahme einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung auch nur in diesem Bereich.

Während aller Versuche haben wir bei niedrigen Drehfrequenzen gesehen, dass sich die Figuren achse in ihrem Lager leicht bewegt hat. Dies könnte evtl. auch diese Abweichung erklären.

5 Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

Bei dieser Aufgabe haben wir die Präzessionsfrequenz gemessen. Um ein äußeres Drehmoment zu erzeugen, haben wir zwei Magnete an dem äußeren Rand des inneren Kardanrahmens befestigt.

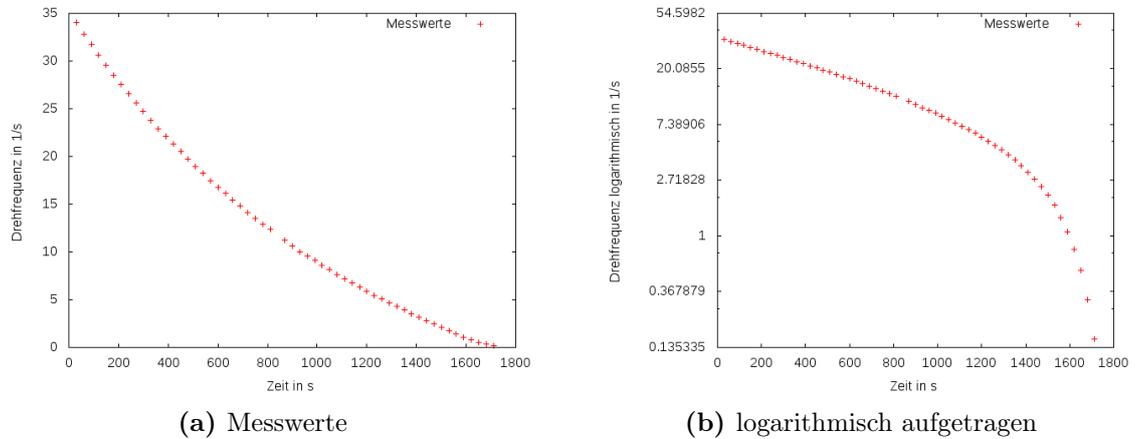


Abbildung 3: Dämpfung des Kreisels

Die Präzessionsfrequenz haben wir mit Hilfe der Messstoppvorrichtung genau abgelesen. Da wir nur die ersten vier Nachkommastellen notiert haben, wirkt sich der Fehler des Messgerätes nicht aus. Auf die Rotationsfrequenz geben wir auch keinen Fehler an, da wir einen Mittelwert bildeten.

Problematisch bei der Messung war das Abbremsen der Nutation. Die Nutation ist außerdem bei abnehmender Kreiseldrehzahl dominanter geworden und konnte zum Ende der Messung hin nicht mehr vollständig abgebremst werden. Der lineare Zusammenhang zwischen Präzessionsfrequenz und reziproker Rotationsfrequenz gilt nur unter der Annahme, dass keine Nutation vorliegt. In Abbildung 4a erkennt man deutlich, dass die Werte bei niedriger Präzessionsfrequenz annähernd eine Gerade bilden. Jedoch weichen die Werte mit hoher Präzessionsfrequenz signifikant von dieser ab. Da bei diesen Messungen die Nutation nicht abzubremsen war, erwarten wir für diese Werte auch keinen linearen Zusammenhang.

Zur Bestimmung des gesuchten Proportionalitätsfaktors beachten wir die letzten sechs Messwerte aus dem Messprotokoll nicht.

Die lineare Regression (Abbildung 4b) ergab folgende Werte:

- $m_3 = 0.178029 \pm 0.0016841/s^2$
- $b_3 = 0.000425271 \pm 0.00029161/s$

Wie man am geringen Wert für b erkennen kann, liegt kaum ein systematischer Fehler vor. Den Fehler auf die Steigung werden wir im Folgenden wie einen statistischen Fehler

behandeln.

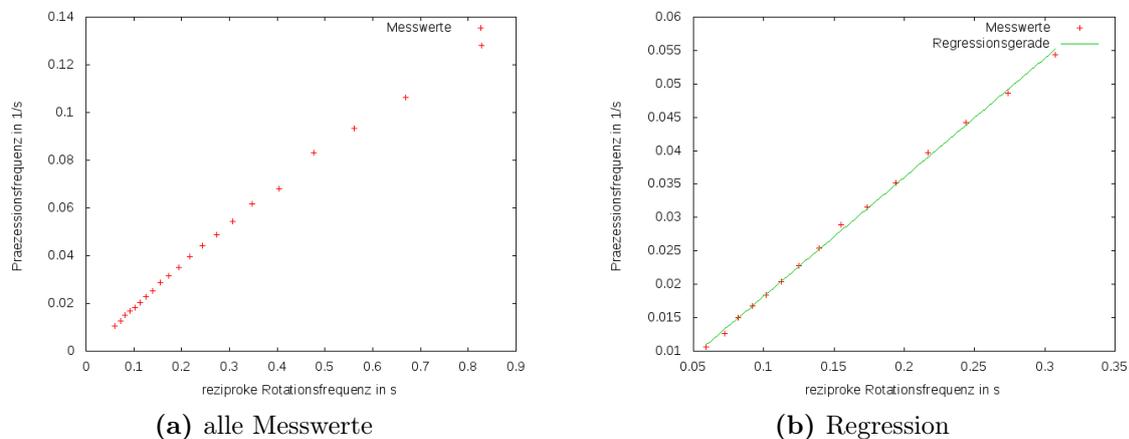


Abbildung 4: lineare Regression

6 Hauptträgheitsmomente

Nun müssen mit den Formeln (12) und (13) aus der Vorbereitung die Trägheitsmomente bestimmt werden.

Bestimmung des Trägheitsmomentes C Zunächst muss das Drehmoment bestimmt werden. Wir verwenden dazu die Angaben von dem Aufgabenblatt und $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Die statistischen Fehler werden mit der Gaußschenfehlerfortpflanzung behandelt, die systematischen mit der arithmetischen Fehlerfortpflanzung.

Der Abstand des Kreiselschwerpunktes zum Schwerpunkt der Magnete wird mit r bezeichnet. Wir verwenden $r = (10,41 \text{ cm} \pm 0,03 \pm 0,2) \text{ cm}$. Dies ergibt sich aus dem Abstand des Kreiselschwerpunktes zum äußeren Rand des inneren Kardanrahmens von dem wir $0,5 \text{ cm}$ abgezogen haben, da der Schwerpunkt der Magnete nicht ganz am Rand lag. Die Magnete haben sich während des Versuches leicht bewegt. Daher geben wir noch einen statistischen Fehler von $0,2 \text{ cm}$ an.

Die Masse jedes Magneten wurde uns mit $40g$ angegeben. Wir wählen $m = (80 \pm 4)g$

$$|\vec{M}| = r \cdot m \cdot g = 0,0817Nm \quad (2)$$

$$\sigma_M = m \cdot g \cdot \sigma_r = 0,00159Nm \quad (3)$$

$$\Delta M = m \cdot g \cdot \Delta r + g \cdot r \cdot \Delta m = 4,3188 \cdot 10^{-3}Nm \quad (4)$$

$$\Rightarrow |\vec{M}| = (0,0817 \pm 0,00159 \pm 0,00432)Nm \quad (5)$$

Damit ergibt sich das Trägheitsmoment C .

$$C = \frac{|\vec{M}|}{m_3} = 0,458914kgm^2 \quad (6)$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{1}{m_3^2} \cdot \sigma_M^2 + |\vec{M}|^2 \cdot \frac{1}{m_3^4} \cdot \sigma_{m_3}^2} = 9,93525 \cdot 10^{-3}kgm^2 \quad (7)$$

$$\Delta C = \frac{1}{m_3} \cdot \Delta M = 0,024259kgm^2 \quad (8)$$

$$\Rightarrow C = (0,4589 \pm 0,0099 \pm 0,0243)kgm^2 \quad (9)$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes A Zunächst muss das Trägheitsmoment Θ_{Gew} der zylindrischen Gewichte mit Hilfe des Steinerschen Satzes berechnet werden.

$$\Theta_{Gew} = 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot m_{Zyl} \cdot d_{Zyl}^2 + m_{Zyl} \cdot \underbrace{\left(a + \frac{1}{2} d_{Zyl} \right)^2}_{(*)} \right) = 0,0575kgm^2 \quad (10)$$

$$\Delta \Theta_{Gew} = \left| \frac{3}{4} d_{Zyl}^2 + 2a^2 + 2ad_{Zyl} \right| \cdot \Delta m_{Zyl} + \left| \frac{3}{2} m_{Zyl} d_{Zyl} + 2m_{Zyl} a \right| \cdot \Delta d_{Zyl} \quad (11)$$

$$+ |4m_{Zyl} a + 2m_{Zyl} d_{Zyl}| \cdot \Delta a \quad (12)$$

$$= 7,693 \cdot 10^{-4}kgm^2 \quad (13)$$

$$\Rightarrow \Theta_{Gew} = (0,0575 \pm 0,0008)kgm^2 \quad (14)$$

*: Abstand Kreisschwerpunkt zu Zylinderachse
Somit ergibt sich das Trägheitsmoment A.

$$A = \frac{\Theta_{Gew}}{\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1} = 0,02764 \text{kgm}^2 \quad (15)$$

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{-2 \cdot \Theta_{Gew} \cdot \frac{m_1}{m_2}}{\left(\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1\right)^2}\right)^2 \cdot \sigma_{m_1}^2 + \left(\frac{2 \cdot \Theta_{Gew} \cdot \frac{m_1^2}{m_2^3}}{\left(\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1\right)^2}\right)^2 \cdot \sigma_{m_2}^2} \quad (16)$$

$$= 5,3514 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2 \quad (17)$$

$$\Delta A = \frac{1}{\frac{m_1^2}{m_2^2} - 1} \cdot \Delta \Theta_{Gew} = 3,6977 \cdot 10^{-4} \text{kgm}^2 \quad (18)$$

$$\Rightarrow A = (2,764 \pm 0,053 \pm 0,037) \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2 \quad (19)$$

Bestimmung des Trägheitsmomentes B Es ergibt sich das Trägheitsmoment B. Wir erwarten, dass $A \approx B$ (siehe Vorbereitung).

$$B = \frac{C^2}{A \cdot m_1^2} = 27,4435 \text{kgm}^2 \quad (20)$$

$$\sigma_B = \sqrt{\left(\frac{2C}{Am_1^2}\right)^2 \cdot \sigma_C^2 + \left(\frac{-C^2}{A^2 m_1^2}\right)^2 \cdot \sigma_A^2 + \left(\frac{-2C^2 m_1}{Am_1^3}\right)^2 \cdot \sigma_{m_1}^2} \quad (21)$$

$$= 1,3013 \text{kgm}^2 \quad (22)$$

$$\Delta B = \left|\frac{2C}{Am_1^2}\right| \cdot \Delta C + \left|\frac{C^2}{A^2 m_1^2}\right| \cdot \Delta A = 3,27347 \text{kgm}^2 \quad (23)$$

$$\Rightarrow B = (27,4435 \pm 1,3013 \pm 3,2735) \text{kgm}^2 \quad (24)$$

Diskussion Es ist deutlich zu erkennen, dass $A \neq B$ gilt. Dies ist unerwartet.

Unser Wert für C ist vermutlich falsch, dies erkennt man auch daran, dass unsere Abschätzung für das Gewicht des Rotors etwa 200kg beträgt (nach Vorbereitung berechnet). Daher sind wir der Meinung, dass eine Fehlerbetrachtung hierfür nicht sinnvoll ist. Sie würde jedoch nach obigem Prinzip verlaufen.

Da B und C unerwartete Werte liefern, vermuten wir, dass die Messung der Präzessionsfrequenz einen prinzipiellen Fehler hat, sodass alle Ergebnisse die daraus folgen

auch falsch sind. Wir vermuten, dass das Gewicht, mit dem wir das Drehmoment erzeugt haben, zu gering war. So war auch die entstandene Präzessionsfrequenz gering. Durch unsere Berührungen (Bremsen der Nutation, Anregen der Präzession) wurde anscheinend eine Änderung der Präzessionsfrequenz erzeugt die in der Größenordnung der eigentlichen Präzessionsfrequenz lag. Somit war das „natürliche“ Verhalten nicht mehr messbar.

Daher vermuten wir, dass der Wert für das Trägheitsmoment A gut ist, da zur Berechnung dieses Wertes nur die Nutationsfrequenzmessung herangezogen wurde. Die beiden anderen Werte sind jedoch unbrauchbar.

7 Kreiselkompass

Der elektrische Antrieb des Drehtisches funktionierte nicht.

Daher warfen wir den Kreisel mit der Hand an und drehten den Tisch dann manuell. Daher konnten wir keine konstante Winkelgeschwindigkeit erreichen.

Man konnte sehen, dass sich die Figurenachse parallel zur Schrägen des Keils ausrichtete, jedoch kam die Figurenachse nie komplett zur Ruhe. Dies lässt sich damit erklären, dass die Winkelgeschwindigkeit des Tisches nicht konstant blieb.

8 Literatur

- Dr. Peter Blüm: Einführung zur Fehlerrechnung im Praktikum; August 2002
- Für die Vorbereitung:
 - * Vorbereitungshilfe
 - * PHYWE: Betriebsanleitung Fahrradkreisel und Drehscheibe nach Prandtl
 - * Zusatz: Theoretische Grundlagen
 - * Demtröder: Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme; Springer 2008