**Vorbereitung**

# Kreisel
# Versuch P2-71,74

Iris Conradi und Melanie Hauck
Gruppe Mo-02

7. Mai 2011

# Inhaltsverzeichnis



# 1 Drehimpulserhaltung

Für den Drehimpuls gilt

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}, \tag{1}$$

wobei $\Theta$ das Trägheitsmoment und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit in Richtung der momentanen Drehachse bezeichnen. Wenn keine äußeren Drehmomente wirken, so gilt die Drehimpulserhaltung:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{konst.}. \tag{2}$$

In diesem Versuch soll diese mittels Drehschemel und Fahrradkreisel demonstriert werden.
Der Drehschemel hat nur eine Drehachse in z-Richtung. Daher demonstrieren wir hier die Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses des Systems aus Fahrradkreisel und Drehschemel.

Wir erwarten also, dass jede Änderung der z-Komponente des Drehimpulses des Fahrradkreisel eine Änderung des Drehimpulses des Drehschemels bewirkt. Dabei muss natürlich der Fahrradkreisel von der Person auf dem Drehschemel gehalten werden.

Eine solche Änderung kann durch kippen des rotierenden Fahrradkreisels oder durch Andrehen des Fahrradkreisels durch die Person auf dem Drehschemel erreicht werden.

Auch mittels einer Änderung der Trägheitsmomente (abhängig von der Position der Masse bzgl. der Drehachse) kann die Drehimpulserhaltung demonstriert werden. Anhand der Gleichung (1) erkennt man, dass sich bei Änderung des Trägheitsmomentes die Winkelgeschwindigkeit ändern muss.
Die Person auf dem Drehschemel kann beispielsweise die Arme weit vom Körper weghalten und wieder anziehen.

# 2 Freie Achsen

Die Hauptachsen eines Körpers sind dadurch gekennzeichnet, dass bei einer Rotation um diese Achsen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ parallel sind. Die Drehachse ist raumfest. Diese Drehachsen sind häufig auch freie Achsen, d.h. ein Körper führt auch ohne Lagerung eine stabile Drehung um diese Achsen aus. Nicht bei jedem Körper sind alle Hauptachsen auch freie Achsen.

Nun soll anhand einer Zigarrenkiste gezeigt werden, dass bei einem Quader die Achse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment keine freie Achse ist.

Die Bewegung eines Kreisels wird durch die Eulerschen Gleichungen beschrieben.

$$\Theta_A \cdot \dot{\omega}_A + (\Theta_C - \Theta_B) \cdot \omega_C \omega_B = M_A \tag{3}$$
$$\Theta_B \cdot \dot{\omega}_B + (\Theta_A - \Theta_C) \cdot \omega_A \omega_C = M_B \tag{4}$$
$$\Theta_C \cdot \dot{\omega}_C + (\Theta_B - \Theta_A) \cdot \omega_B \omega_A = M_C \tag{5}$$

Im Experiment wird die Zigarrenkiste mit einem Elektromotor angetrieben, sodass ein $\omega_j$ konstant ist. In diesem Fall wirken keine Drehmomente $\vec{M}$. Damit erhält man für die beiden verbleibenden Winkelgeschwindigkeiten jeweils eine Differentialgleichung der Form:

$$\ddot{\omega}_i + \underbrace{\frac{\Theta_j - \Theta_k}{\Theta_i} \cdot \frac{\Theta_j - \Theta_i}{\Theta_k} \cdot \omega_j^2}_{=Z} \cdot \omega_i = 0 \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung wird natürlich durch die triviale Lösung $\omega_i = 0$ erfüllt. Wenn $Z > 0$ gilt, dann ergibt sich eine periodische Lösung (ungedämpfter harmonischer Oszillator). Z ist positiv für Drehungen um die Hauptachsen mit dem kleinsten und dem

größten Trägheitsmoment. Wenn $Z < 0$ ist, so ergibt sich keine periodische Lösung. Dies ist für das mittlere Trägheitsmoment erfüllt.
Die triviale Lösung wird in der Praxis kaum möglich sein, da sich die Zigarrenkiste absolut störungsfrei drehen müsste. Drehungen um die Hauptachsen mit dem kleinsten und dem größten Trägheitsmoment sind auch in der Praxis stabil, da durch die periodische Beschaffenheit der Lösung sich kleine Störungen nicht aufschaukeln.

Die Hauptträgheitsmomente eines Quaders berechnen folgendermaßen:

$$\Theta = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) \tag{7}$$

wobei b und c die Abmessungen des Quaders in die beiden Richtungen senkrecht zur Rotationsachse sind und $m$ bezeichnet die Masse des Quaders.

Man muss jedoch beachten, dass ein Körper dazu neigt um die Achse mit dem größten Hauptträgheitsmoment zu rotieren. Sollte es also bei der Rotation um die Achse mit dem kleinsten Hauptträgheitsmoment zu einer ausreichend großen Erschütterung kommen, so wird der Quader kippen und um die Achse mit dem größten Hauptträgheitsmoment rotieren.

# 3 Kräftefreier Kreisel

In diesem Versuch wird die Nutationsfrequenz an einem symmetrischen Kardankreisel (Hauptträgheitsmomente: $\Theta_C \neq \Theta_A = \Theta_B$, $\Theta_C$ ist das Hauptträgheitsmoment der Figurenachse) gemessen.

Auf einen kräftefreien Kreisel wirken keine äußeren Drehmomente.
Nutation bezeichnet die Rotation der Figurenachse um die Drehimpulsachse. Zudem rotiert dann auch die momentane Drehachse um die Drehimpulsachse. Dies kann man jedoch nicht beobachten.
Wir messen die Nutationsfrequenz in Abhängigkeit der Rotationsfrequenz um die Figurenachse mit den Fototransistorschaltungen. Die Fototransistorschaltungen generieren aus dem Hell-Dunkel-Wechsel ein Rechtecksignal. Die Frequenz dieses Signals kann mit einem Frequenzzähler bestimmt werden. Zur Messung der Rotationsfrequenz wird die Reflexion eines Streifens auf der Kreiselscheibe verwendet. Die Nutationsfrequenz wird durch den Schattenwurf des inneren Kardanrahmens bestimmt.

In der Vorbereitungshilfe wird folgender linearer Zusammenhang zwischen Rotationsfrequenz und Nutationsfrequenz hergeleitet.

$$\omega_N = \frac{\Theta_C}{\Theta_A} \cdot \omega \tag{8}$$

Diese Formel gilt jedoch nur für kleine Öffnungswinkel des Nutationskegels, d.h. die Figurenachse sollte sich während des Experimentes nicht zu weit von der Drehimpulsachse wegneigen. Außerdem wurde noch nicht berücksichtigt, dass die Kardanrahmen Masse haben und somit wenn sie rotieren auch ein Trägheitsmoment haben. Es muss beachtet werden, welche Rahmen bei der Drehung um welche Hauptachse bewegt werden. Somit ergeben sich die veränderten Trägheitsmomente folgendermaßen:

$$A = \Theta_A + \Theta_A^{Innenkardan} + \Theta_A^{Aussenkardan} \tag{9}$$

$$B = \Theta_B + \Theta_B^{Innenkardan} \tag{10}$$

$$C = \Theta_C \tag{11}$$

Somit wird Gleichung (8) zu:

$$\omega_N = \frac{C}{\sqrt{A \cdot B}} \cdot \omega \tag{12}$$

Der Versuch soll noch mit veränderten Trägheitsmomenten durchgeführt werden. Somit wird sich die Proportionalitätskonstante ändern.

# 4 Dämpfung des Kreisels

Nun wird erneut die Rotationsfrequenz des Kreisels gemessen. Jedoch wird sie über einen längeren Zeitraum betrachtet, um die Dämpfung des Kreisels durch die Lager- und Luftreibung zu analysieren.

# 5 Der Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

Wenn ein äußeres Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ auf den Kreisel wirkt, so beginnt dieser zu präzessieren, d.h. der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ bewegt sich um die Vertikale.

In diesem Versuch wird das äußere Drehmoment durch ein Gewicht am inneren Kardanrahmen mit Hilfe der Schwerkraft erzeugt.

Zusätzlich zur Präzessionsbewegung ergibt sich auch eine Nutation. Diese kann jedoch bei der Berechnung der Präzessionsfrequenz $\omega_P$ vernachlässigt werden, da $\omega \gg \omega_P$ gilt. Bei der Durchführung des Versuches muss die Nutationsbewegung jedoch noch abgedämpft werden.
In der Vorbereitungshilfe werden folgende Beziehungen hergeleitet:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L} \qquad \text{und} \qquad \omega_P = \frac{|\vec{M}|}{\omega \cdot \Theta_C} \tag{13}$$

Die Präzessionsfrequenz soll in Abhängigkeit der Rotationsfrequenz gemessen werden.

# 6 Hauptträgheitsmomente

Mit Hilfe der Gleichungen (12) und (13) und den Ergebnissen aus den Regressionen kann man auf die drei Hauptträgheitsmomente schließen. Jedoch berechnet man die Hauptträgheitsmomente einschließlich der Kardanrahmen. Diese wirken sich, wie oben schon gezeigt, nicht auf $\Theta_C$ aus. Somit kann man aus $\Theta_C$ direkt die Masse des Rotors abschätzen, indem man annimmt, dass der Rotor ein Zylinder ist.
Für einen Zylinder, der sich um die Zylinderachse dreht, gilt:

$$\Theta_{Zyl} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \tag{14}$$

# 7 Kreiselkompass

In diesem Versuch wird wieder der Kardankreisel verwendet, jedoch wird die Horizontalebene blockiert.
Es soll das Verhalten eines Kreiselkompasses studiert werden. Jedoch ist die Lagerreibung unseres Kreisels zu groß um den Effekt zu erkennen. Daher wird ein Drehtisch verwendet um eine größere Winkelgeschwindigkeit zu erzielen.

Die Winkelgeschwindigkeit des Drehtisches kann in parallele und senkrechte Komponente bezogen auf die fixierte Horizontalebene des Kreisels aufgeteilt werden. Entsprechend teilt sich auch das wirkende Drehmoment $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega}_D$.

Die parallele Komponente des Drehmomentes wird keine sichtbare Wirkung haben, da die Horizontalebene blockiert ist. Die senkrechte Komponente wird jedoch dafür sorgen, dass sich die Figurenachse entlang der virtuellen Nord-Süd Richtung ausrichtet, denn dann fallen die Parallelkomponente der Winkelgeschwindigkeit und die Drehimpulsachse des Rotors zusammen.