

Versuchsdatum: 7.11.2011

# Gitterschwingungen

Iris Conradi und Melanie Hauck  
Gruppe 118

14. Dezember 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ziel des Versuches</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Modell . . . . .	4
2.2	Lineare einatomige Kette . . . . .	5
2.3	Lineare zweiatomige Kette . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Durchführung</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
5.1	Dispersionsrelationen . . . . .	11
5.1.1	Lineare einatomige Kette . . . . .	11
5.1.2	Lineare zweiatomige Kette . . . . .	13
5.2	Bestimmung der Federkonstante . . . . .	15
5.2.1	Lineare einatomige Kette . . . . .	15
5.2.2	Lineare zweiatomige Kette . . . . .	16
5.3	Amplitudenverhältnis . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Literatur</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Korrektur</b>	<b>19</b>
7.1	zur Bestimmung der Federkonstanten . . . . .	19
7.2	zum Amplitudenverhältnis . . . . .	19

## 1 Ziel des Versuches

In diesem Versuch betrachten wir Gitterschwingungen, wie sie in kristallinen Festkörpern vorkommen.

Die Messungen führen wir an einem makroskopischen, mechanischen eindimensionalen Modell durch.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Modell

In einem Kristall befinden sich die Atome in periodischer Anordnung an festen Plätzen. Diese sind durch die Gitterpunkte und die Basis beschrieben.

Die Atome werden in unserem Modell als Punktmassen behandelt. Dies ist möglich, da die Masse des Atoms hauptsächlich im Kern liegt. Die Ausdehnung des Atoms und somit auch der Gitterabstand sind wesentlich größer.

Im Gleichgewichtsabstand einer atomaren Bindung befinden sich die Valenzelektronen in einem energetisch günstigen Zustand. In einem Kristall befindet sich ein Atom im überlagerten Potential aller anderen Atome. Relevant sind jedoch nur die Potentiale der nächsten Nachbarn. Die Wechselwirkung mit den anderen Atomen ist vernachlässigbar.

Durch die thermische Bewegung der Atome oder durch andere Störungen werden die Atome leicht aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, sodass eine Schwingung um das Minimum des Potentials (Ruhelage) entsteht.

Da die Auslenkungen klein sind, können wir das Potential um den Gleichgewichtsabstand entwickeln. Es kann nach wenigen Termen abgebrochen werden. Hier wählen wir schon eine eindimensionale Beschreibung, da unser Modell eines Gitters eindimensional sein wird.

$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} U \Big|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U \Big|_{x=x_0} + \dots \quad (1)$$

Da die erste Ableitung des Potentials in der Ruhelage verschwindet (die Ruhelage ist das Minimum des Potentials), handelt es sich näherungsweise um ein parabelförmiges Potential. Somit kann die Schwingung wie verkettete harmonische Oszillatoren ohne Reibung behandelt werden.

Auf Grundlage dieser Überlegungen ist es sinnvoll als Modell dieses Systems eine Kette von äquidistanten Massen (Abstand  $d$ ) zu verwenden, die durch gleichstarke Federn verbunden sind. Auch an den äußeren Massen befinden sich zwei Federn. Die äußere Feder ist mit einer festen Wand verbunden.

In diesem System entstehen also longitudinale stehende Wellen. Auch im realen Kristall ist die Schwingung auf einen bestimmten Raum begrenzt.

Die stehenden Wellen können nur bestimmte Wellenlängen einnehmen (Moden). Diese sind durch die Länge der Kette  $L$  und die Knotenbedingung am Rand bestimmt.

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = L \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (2)$$

Da wir nur an diskreten Orten Information über die Amplitude haben (Auslenkung der Massenpunkte) können wir nur Wellenlängen erkennen, die größer sind als  $2d$ . Kurzwelligere Schwingungen können nicht von einer Schwingung mit Wellenlänge  $\lambda > 2d$  unterschieden werden. Dieser Umstand entspricht dem aus der Messtechnik bekannten Abtasttheorem.

Aus der minimal unterscheidbaren Wellenlänge  $\lambda_{min} = 2d$  können wir somit die Anzahl der Moden bestimmen.

$$n_{max} = \frac{L}{d} \quad (3)$$

Man findet leicht den maximalen und minimalen Wellenvektor.

$$k_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{d} \quad k_{min} = \frac{\pi}{n_{max}d} \quad (4)$$

Alle möglichen Wellenvektoren liegen also im Bereich von  $[0, \pi/d]$ . Dieser Bereich liegt im einatomigen Fall in der ersten Brillouin-Zone. Diese umfasst den Bereich  $[\pi/a, \pi/a]$ , wobei  $a$  die Gitterkonstante bezeichnet. Hier gilt  $a = d$ .

Die Brillouin-Zone beschreibt die primitive Zelle im reziproken Raum. Sie umfasst also die kleinstmögliche Einheit, mit der das Gitter im reziproken Raum gebildet werden kann. Daher umfasst sie alle Informationen.

Im Fall der zweiatomigen Basis gilt  $a = 2d$ . Auch hier müssen alle möglichen Moden in der Brillouin-Zone liegen.

## 2.2 Lineare einatomige Kette

Um das Verhalten der linearen einatomigen Kette zu beschreiben, stellen wir nun die Bewegungsgleichung für jedes Teilchen auf. Da wir nur die Kräfte berücksichtigen, die durch die nächsten Nachbarn ausgeübt werden, wirken auf ein Teilchen zwei Federkräfte (Federkonstante  $D$ ).

Die Federkraft entsteht dadurch, dass die Feder gestaucht oder gedehnt wird. Diese Längenänderung resultiert aus den Auslenkungen  $s$  der beiden Teilchen aus ihrer Ruhelage. Die Längenänderung der Feder bestimmen wir entlang der positiven x-Achse (verläuft von links nach rechts). Daher müssen wir die Auslenkung des linken Teilchens von der Auslenkung des rechten Teilchens abziehen um die Auslenkung der Feder zu erhalten. Die Federkraft wirkt entgegen der Auslenkung der Feder, d.h. ist die Feder gestreckt, werden die beiden Teilchen zur Federmitte hin beschleunigt. Somit erhalten wir ein zusätzliches negatives Vorzeichen für das Teilchen, das sich rechts von der Feder befindet. Die Bewegungsgleichung des Teilchens  $j$  lautet somit:

$$m\ddot{s}_j = -D(s_j - s_{j-1}) + D(s_{j+1} - s_j) . \quad (5)$$

Diese Gleichung kann man mit dem Ansatz einer ebenen Welle lösen. Dabei werden die Auslenkungen nur an den Orten der Teilchen  $j$  gemessen. Diese Orte sind Vielfache der Gitterkonstanten  $a$ . Somit ergibt sich folgender Ansatz:

$$s_j(k, \omega, t) = s_0 e^{i(k \cdot ja - \omega t)} \quad (6)$$

Durch einsetzen des Ansatzes in Gleichung ( 5) findet man:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \cdot \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (7)$$

Dabei handelt es sich um die Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette. Wenn die Dispersionsrelation nicht linear ist in  $k$  so unterscheiden sich die Gruppengeschwindigkeit  $v_G$  und die Phasengeschwindigkeit  $v_P$  der Welle.

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} \quad v_P = \frac{\omega}{k} \quad (8)$$

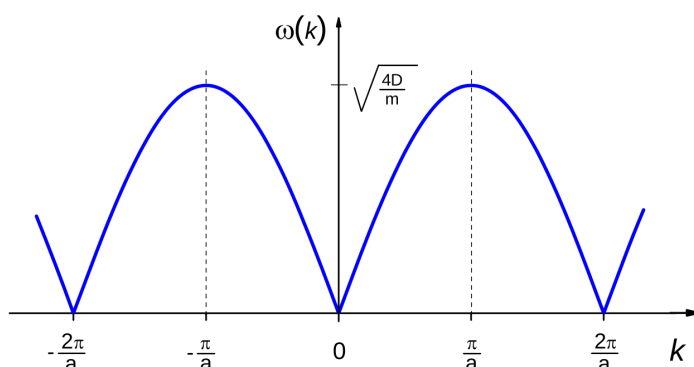
Hier ist die Dispersionsrelation nicht linear. Somit gibt es Dispersion.

In Abbildung 1 auf der nächsten Seite ist die Dispersionsrelation dargestellt. Da sie periodisch ist, stimmt dieses Ergebnis mit den obigen Überlegungen zu der maximalen Anzahl an verschiedenen Moden bzw. Wellenvektoren überein. Im Versuch erhalten wir wie oben erwähnt nur diskrete Moden also auch nur diskrete Werte in der Dispersionsrelation.

Da in unserem Versuch 12 Massen verwendet werden, ist die maximale Anzahl der Moden 12. Da die Kette mit jeweils einer vollständigen Feder abschließt, ist  $L = 13a$ . Daher findet man für die Wellenvektoren der einzelnen Moden:

$$k_n = \frac{n\pi}{13a} \quad (9)$$

Im Bereich  $ka \ll 1$  wird die Dispersionsrelation linear in  $k$ . Somit stimmen Phasen-



**Abbildung 1:** Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette

und Gruppengeschwindigkeit in diesem Limes überein.

$$v_G = v_P = \sqrt{\frac{Da^2}{m}} \quad (10)$$

Man kann zeigen, dass dieser Wert genau der Schallgeschwindigkeit in Medium entspricht. Dies gleichzeitig die höchste auftretende Wellenausbreitungsgeschwindigkeit.

## 2.3 Lineare zweiatomige Kette

In einem zweiten Versuch werden wir jede zweite Masse durch eine größere ersetzen. Dadurch entsteht ein Gitter mit Gitterkonstante  $a = 2d$  und einer zweiatomigen Basis.

Analog zu oben suchen wir nun die Bewegungsgleichungen der Teilchen. Die Kräfte ermittelt man analog. Man muss jedoch zwischen Teilchen mit normaler Masse  $m$  und erhöhter Masse  $M$  unterscheiden.

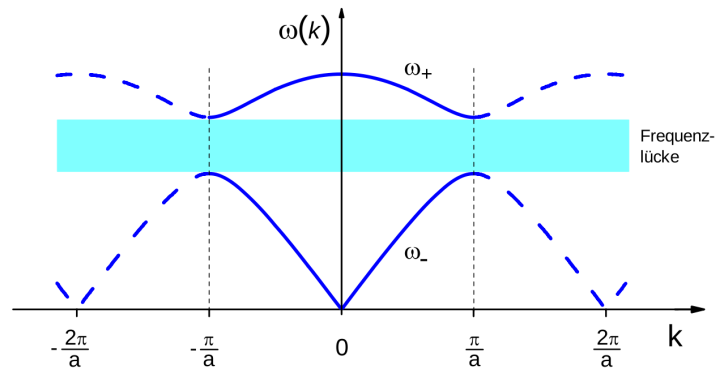
$$m\ddot{s}_j = -D(s_j - s_{j-1}) + D(s_{j+1} - s_j) \quad (11)$$

$$M\ddot{s}_{j+1} = -D(s_{j+1} - s_j) + D(s_{j+2} - s_{j+1}) \quad (12)$$

Zur Lösung werden wieder ebene Wellen eingesetzt. Jedoch sind die Amplituden der ebenen Wellen mit kleiner Masse  $s_{0,m}$  verschieden von denen mit großer Masse  $s_{0,M}$ . Man findet wieder eine Dispersionsrelation.

$$\omega_{\pm}^2 = D \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm D \sqrt{\left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 \frac{ka}{2}} \quad (13)$$

Diese Dispersionsrelation ist in Abbildung 2 auf der nächsten Seite dargestellt. Man



**Abbildung 2:** Dispersionsrelation der linearen zweiatomigen Kette

erkennt, dass die Äste  $\omega_+$  und  $\omega_-$  sich nicht treffen. Es existiert eine Frequenzlücke. Der  $\omega_-$ -Ast wird als akustischer Ast bezeichnet. Denn in diesem Ast findet man wieder für den Grenzfall  $ka \ll 1$  die Schallgeschwindigkeit.

$$v_G = v_P = \sqrt{\frac{Da^2}{2(m+M)}} \quad (14)$$

In diesem Grenzfall schwingen beide Massen mit gleicher Amplitude. Falls  $k \approx \pi/a$  geht die Amplitude der kleinen Massen gegen Null.

Der  $\omega_+$ -Ast heißt optischer Ast, da die kleinen und großen Massen der Kette hier gegeneinander schwingen. Wenn die Massen unterschiedliche Ladungen tragen entstehen so zeitlich veränderliche Dipole. Sie strahlen also elektromagnetische Wellen ab, bzw. absorbieren diese.

Bei den optischen Moden schwingen die leichten Massen stärker. Bei  $ka \ll 1$  ist das Amplitudenverhältnis durch das Massenverhältnis charakterisiert. Für  $k \approx \pi/a$  schwingen die großen Massen fast nicht mehr.

Die Länge der Kette entspricht hier  $L = 6,5a$ , da die Gitterkonstante gegenüber der linearen einatomigen Kette verdoppelt wurde. Somit finden wir für die Wellenvektoren der Moden

$$k_n = \frac{n\pi}{6,5a} . \quad (15)$$

Der maximale Wellenvektor ist  $k = \pi/a$  (Rand der Brillouin-Zone). Da  $n$  ganzzahlig sein muss, gibt es also sechs Wellenvektoren. Trotzdem gibt es zwölf Moden, da es zu jedem Wellenvektor eine Mode aus dem akustischen (Massen schwingen gleichphasig) und eine aus dem optischen Ast (Massen schwingen gegenphasig) gibt.

Wenn man nun nicht mehr nur die Schwingungen der einzelnen Massenpunkte betrachten



---

will, sondern unendlich viele Massenpunkte einführt, um die Moden als kontinuierliche Wellen darzustellen, so muss man das berechnete Amplitudenverhältnis um einen Faktor korrigieren. Diese sind in der Vorbereitungsmappe angegeben.

### 3 Experimenteller Aufbau

Wie schon erwähnt haben wir einen Aufbau mit zwölf Massen, die durch gleich starke Federn verbunden sind. Die Massen sind durch Schlitten auf einer Luftkissenbahn realisiert, um die Reibungsfreiheit anzunähern.

Die Schlitten sind mit Reflektoren ausgestattet, sodass die Schwingung durch eine Kamera aufgenommen werden können, die in vorgegebener Frequenz Lichtblitze aussendet. Zur Auswertung stehen LabView Programme zur Verfügung.

Außerdem ist ein Motor bereitgestellt mit dem die Eigenmoden angeregt werden können.

### 4 Durchführung

#### Eigenfrequenzen

Zuerst haben wir die Eigenfrequenzen der beiden Ketten gemessen. Dazu versuchten wir alle Eigenfrequenzen einer Kette gleichzeitig anzuregen. Um dies zu erreichen, ist es sinnvoll einen  $\delta$ -förmigen Kraftstoß zur Anregung zu verwenden, denn die Fouriertransformierte einer  $\delta$ -Funktion enthält alle Frequenzen.

Mit Hilfe des bereitgestellten LabView-Programms konnten wir die Frequenzzzerlegung der Schwingung beobachten, da eine schnelle Fouriertransformation (FFT) durchgeführt wurde. Nach ca. 100 s bildeten sich stabil 12 Peaks aus. Diese Frequenzen entsprechen den Eigenfrequenzen des Systems.

Dies führten wir für jede der Ketten viermal durch, um einen geeigneten Mittelwert für die Eigenfrequenzen zu erhalten.

Bei der zweiatomigen Kette konnte man die Frequenzlücke zwischen den ersten und letzten sechs Moden deutlich erkennen.

#### Zuordnung der Modennummern

Um die Eigenfrequenzen den jeweiligen Moden zuordnen zu können, regten wir die zweiatomige Kette nacheinander mit den zwölf Eigenfrequenzen (Mittelwerte) an. Nach fünf bis sieben Minuten war der Einschwingvorgang abgeschlossen und man konnte die jeweilige Eigenmode deutlich erkennen.

Wie erwartet, waren die höheren Frequenzen den optischen Moden zuzuordnen, da sich die Gleiter mit verschiedenen Massen gegenphasig bewegten. Bei niedrigeren Frequenzen (akustische Moden) war eine gleichphasige Bewegung zu beobachten.

Bei jeder Frequenz zählten wir die entstandenen Knoten. Durch Vergleich mit Fig. 6.3 aus der Vorbereitungshilfe konnten wir den Frequenzen die entsprechende Modennummer zuordnen.

Wir konnten auch den im Theorieteil beschriebenen Effekt erkennen, dass bei hohen Moden eine der Massensorten mit deutlich geringerer Amplitude schwang.

Um die Eigenfrequenzen anzuregen, stellten wir diese an einem Motor ein. Allerdings konnte die Frequenz nur bis zur vierten Nachkommastelle genau eingegeben werden. Jedoch wurde trotzdem im Wesentlichen eine Eigenmode angeregt, sodass deren Knotenbild gut zu erkennen war.

Nach der am Arbeitsplatz befindlichen Beschreibung, stellten wir die Amplitude für akustische Moden niedriger ein, als für optische Moden. Dies geschah, um eine ausreichende Schwingung sehen zu können, ohne dass es zu einer Kollision der Gleiter kam.

### Amplitudenmessung

Nach dem Einschwingvorgang starteten wir die Messung der Amplituden zweier Gleiter. Diese wurde mit Hilfe eines bereitgestellten LabView-Programmes durchgeführt.

### Länge der Kette

Um aus den Modennummern die Wellenvektoren zu bestimmen, benötigen wir die Gesamtlänge der Kette.

Diese bestimmten wir mit Hilfe eines Meterstabes. Es stand uns auch ein Maßband zur Verfügung. Allerdings haben wir uns für den Meterstab entschieden, da wir das mehrmalige Ansetzen des Meterstabes genauer durchführen konnten, als die Messung mit dem durchhängenden Maßband.

Es war etwas schwierig den Anfang und das Ende der Kette zu bestimmen, da die äußeren Federn Aufhängungen besitzen. Der Fehler der durch diesen Umstand entsteht ist größer als der Fehler der durch die Genauigkeit des Meterstabes (Feinheit der Skala) entsteht. Wie oben gesagt, haben wir das Ansetzen des Meterstabes sehr gewissenhaft durchgeführt. Daher haben wir insgesamt einen systematischen Fehler von 4 mm auf die Länge der Kette.

$$L = (5,41 \pm 0,004)m \quad (16)$$

---

## 5 Auswertung

Die Datentabellen der einzelnen Versuche sind an das Messprotokoll angeheftet. Die Frequenzen sind in Hz angegeben. Zur Auswertung des Versuches werden diese allerdings in Kreisfrequenzen umgerechnet.

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (17)$$

Die Amplituden sind in mm gemessen.

### 5.1 Dispersionsrelationen

#### 5.1.1 Lineare einatomige Kette

Entsprechend Gleichung (2) können wir aus den Modennummern  $n$  den zugehörigen Wellenvektor berechnen.

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = n \cdot 0,580701045 \frac{1}{m} \quad (18)$$

Der systematischen Fehler auf die Länge wird mit Hilfe der Größtfehlerabschätzung in einen systematischen Fehler auf den Wellenvektor umgerechnet.

$$\Delta k_n = \left| \frac{\partial k_n}{\partial L} \right| \cdot \Delta L = -\frac{n\pi}{L^2} \cdot \Delta L \approx n \cdot 4,2935 \cdot 10^{-4} \frac{1}{m} \quad (19)$$

$$\Rightarrow k_n = n \cdot (0,58070 \pm 0,00043) \frac{1}{m} \quad (20)$$

Für die Gitterkonstante ergibt sich:

$$a_1 = \frac{L}{13} = 41.62 \text{ cm} \quad (21)$$

Jedoch ist diese Angabe so nicht ganz korrekt. Die Federn waren nicht direkt miteinander verbunden. Sie waren an den Seiten der kleinen Massen auf den Gleitern befestigt. So müssten wir die Länge einer kleinen Masse zur Länge der Kette hinzuaddieren, bevor wir die Länge durch 13 dividieren, um die korrekte Gitterkonstante zu erhalten.

Die Länge  $l$  einer kleinen Masse schätzen wir folgendermaßen ab:

$$l = (4 \pm 1) \text{ cm} \quad (22)$$

Es handelt sich hierbei auch um einen systematischen Fehler.

$$a_1 = \frac{L+l}{13} = 41.93 \text{ cm} \quad (23)$$

$$\Delta a_1 = \left| \frac{\partial a_1}{\partial L} \right| \cdot \Delta L + \left| \frac{\partial a_1}{\partial l} \right| \cdot \Delta l = \frac{1}{13}(\Delta L + \Delta l) = 0.08 \text{ cm} \quad (24)$$

$$\Rightarrow a_1 = (41.93 \pm 0.08) \text{ cm} \quad (25)$$

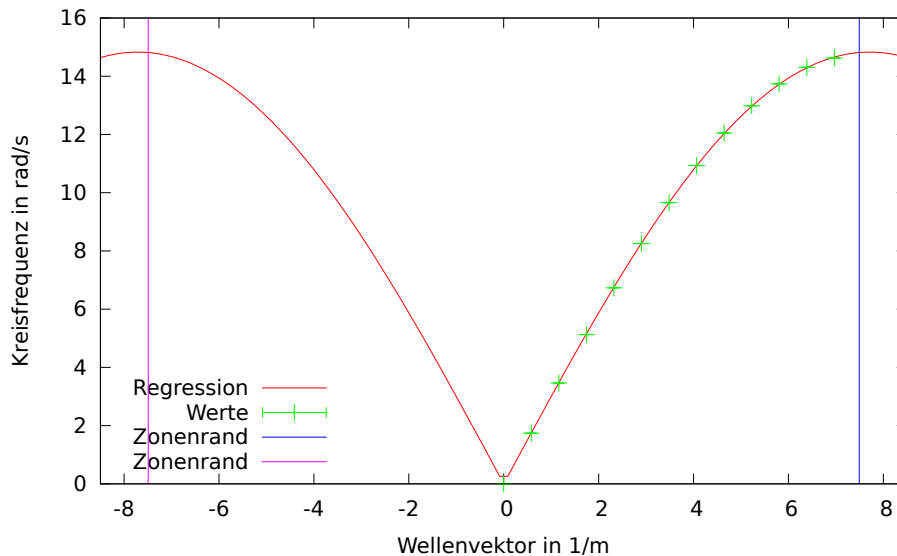
Somit ergibt sich für den Zonenrand:

$$k_{Z,1} = \frac{\pi}{a_1} = 0,07492 \frac{1}{\text{cm}} \quad (26)$$

$$\Delta k_{Z,1} = \frac{\pi}{a_1^2} \Delta a_1 = 1,43 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{cm}} \quad (27)$$

$$\Rightarrow k_{Z,1} = (7,492 \pm 0,014) \frac{1}{\text{m}} \quad (28)$$

Abbildung 3 zeigt die von uns gemessene Dispersionsrelation für die lineare einatomige



**Abbildung 3:** gemessene Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette

Kette. Der Zonenrand ist in der Graphik markiert.

Die Dispersionsrelation entspricht also genau unseren Erwartungen (vgl. Abbildung 1 auf Seite 7). Den Fit haben wir durchgeführt mit einer Funktion der Form

$$f(k) = c \cdot |\sin(bk)| \quad (29)$$

Für die Parameter haben wir folgende Werte erhalten:

$$c = (14.8298 \pm 0.0202) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (30)$$

$$b = (0.203664 \pm 0.0004597) \text{m} \quad (31)$$

Theoretisch muss gelten  $b = a/2$ , dies stimmt in etwa mit unserem Ergebnis überein. Der Wert liegt jedoch nicht im Fehlerbereich. Dies könnte auch damit zusammenhängen, dass wir den Fehler auf  $a$  nicht richtig bestimmt haben.

**Bestimmung der Schallgeschwindigkeit** Mit Hilfe des Wertepaares für die erste Mode können wir die Schallgeschwindigkeit bestimmen. Denn diese entspricht wie oben erklärt der Steigung in der Nähe von  $k = 0$ .

$$v_1 = \frac{\omega_1 - 0}{k_1 - 0} = 2.9958 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (32)$$

$$\sigma_{v_1} = \frac{\sigma_{\omega_1}}{k_1} = 2.8466 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (33)$$

$$\Delta v_1 = \frac{\omega_1}{k_1^2} \cdot \Delta k = 2,2183 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (34)$$

$$\Rightarrow v_1 = (2.9958 \pm 0.0028 \pm 0.0022) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (35)$$

### 5.1.2 Lineare zweiatomige Kette

Zur Bestimmung der Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette benötigen wir wieder die zu den einzelnen Frequenzen zugehörigen Wellenvektoren.

Im Versuch haben wir den einzelnen Frequenzen die Modennummern durch Beobachten der Knotenbilder zugeordnet. Die akustischen Moden haben die sechs niedrigen Frequenzen. Die Modennummer steigt mit steigender Frequenz. Bei den optischen Moden steigt die Modennummer mit sinkenden Frequenzen.

Da die Länge der Kette  $L$  für diesen Versuch gleich bleibt, ändert sich die Gleichung zur Berechnung der  $k_n$  nicht. Nur treten hier nur die ersten sechs Werte auf.

Wie schon im theoretischen Teil angesprochen, ist die Gitterkonstante der linearen zweiatomigen Kette doppelt so groß wie die der einatomigen Kette. Es gilt hier:

$$a_2 = \frac{L + l}{6,5} = 2 \cdot a_1 \quad (36)$$

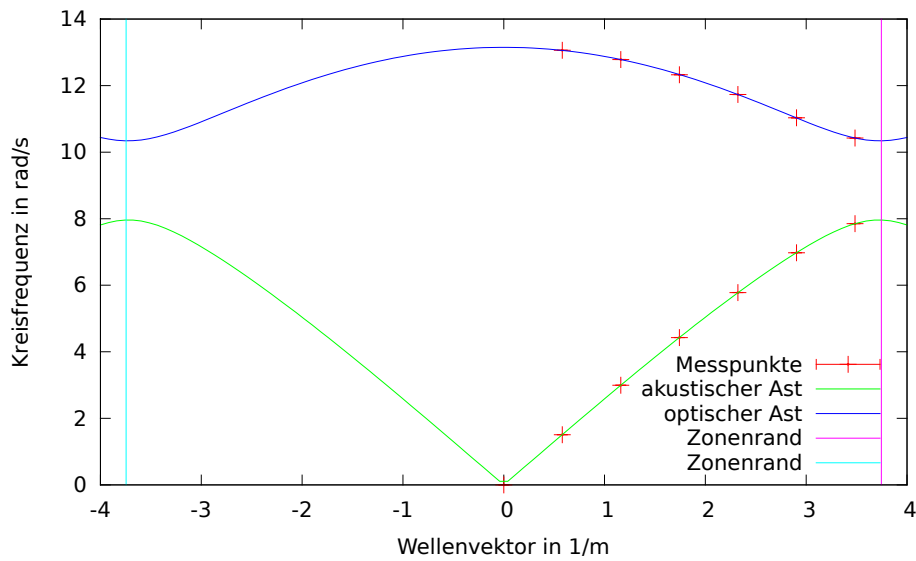
Somit ergibt sich direkt:

$$a_2 = (83.86 \pm 0.16) \text{cm} \quad (37)$$

Auch den Zonenrand können wir direkt aus der alten Berechnung ableiten:

$$k_{Z,2} = (3.746 \pm 0,007) \frac{1}{m} \quad (38)$$

In Abbildung 4 ist die Dispersionsrelation der linearen zweiatomigen Kette abgebildet. Der Zonenrand ist eingezeichnet. Zur Anpassung haben wir für die zwei Äste die Gleichungen für  $\omega_+$  und  $\omega_-$  verwendet, wie sie sich aus Gleichung (13) aus dem Theorieteil ergeben. Für die kleine Masse haben wir dabei den in der Vorbereitungshilfe angegebenen Wert  $m = 0.504 \text{ kg}$  verwendet. Die Parameter, die sich in den beiden Fits ergaben,



**Abbildung 4:** gemessene Dispersionsrelation der linearen zweiatomigen Kette

sind in Tabelle 1 aufgeführt. Die Werte sind plausibel. Auch passt die Regression gut zu den Messwerten. Das sich ergebende Bild stimmt mit unseren Erwartungen, wie sie im Theorieteil beschrieben sind, überein. Auch die Frequenzlücke ist gut zu erkennen.

	D [ $\text{kg}/\text{s}^2$ ]	M [ $\text{kg}$ ]	$a_2$ [ $\text{m}$ ]
akustisch	$24.2794 \pm 0,8618$	$0,766078 \pm 0,02315$	$0,84421 \pm 0,007058$
optisch	$26,9399 \pm 0,04955$	$0,815957 \pm 0,003588$	$0,842526 \pm 0,0019248$

**Tabelle 1:** Ergebnisse der Regression für  $\omega_{\pm}$

**Bestimmung der Schallgeschwindigkeit** Analog zum Fall mit der einatomigen Kette bestimmen wir nun die Schallgeschwindigkeit. Hierfür wird natürlich der Wert

für  $n = 1$  aus dem akustischen Ast verwendet. Es ergibt sich

$$v_2 = (2.5990 \pm 0.0049 \pm 0.0019) \frac{m}{s} \quad (39)$$

Aus dem Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten der ein- und der zweiatomigen Kette kann man nun auf das Massenverhältnis  $\frac{M}{m}$  schließen. Dazu verwenden wir Gleichung (10) und Gleichung (14) aus dem Theorieteil.

$$\frac{M}{m} = 2 \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 - 1 = 1,6573 \quad (40)$$

$$\sigma_{M/m} = \sqrt{\left( \frac{4v_1}{v_2^2} \right)^2 \cdot \sigma_{v_1}^2 + \left( \frac{-4v_1^2}{v_2^3} \right)^2 \cdot \sigma_{v_2}^2} = 0,0112 \quad (41)$$

$$\Delta M/m = \left| \frac{4v_1}{v_2^2} \right| \cdot \Delta v_1 + \left| \frac{-4v_1^2}{v_2^3} \right| \cdot \Delta v_2 = 0,00779 \quad (42)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = 1,6573 \pm 0,0112 \pm 0,0078 \quad (43)$$

Somit findet man mit der Angabe für  $m$  folgenden Wert für die große Masse:

$$M = (0,8353 \pm 0,0056 \pm 0,0039) \text{kg} \quad (44)$$

Somit passt dieser Wert zu den Werten, die sich aus den Fits ergaben. Er liegt jedoch etwas darüber.

## 5.2 Bestimmung der Federkonstante

### 5.2.1 Lineare einatomige Kette

In der Aufgabenstellung wird gefordert, dass man den Wert für die Federkonstante aus der Dispersionsrelation bestimmt, indem man ein Wertepaar einsetzt. Dazu verwendet man am besten das Wertepaar mit dem geringsten Fehler auf  $\omega$ . Bei uns handelt es sich dabei um Mode 6. Man muss also folgende Gleichung behandeln:

$$D = \frac{m\omega^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{ka_1}{2}} = 26,40 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \quad (45)$$

Eine Fehlerbehandlung dieser Gleichung ist sehr aufwendig. Außerdem ist das Ergebnis nicht sonderlich aussagekräftig, da es nur aus einem der zwölf Messpunkte entsteht. Das Ergebnis ist wesentlich genauer, wenn wir es aus dem Fitparameter  $c$  der Dispersionsrelation schließen. Dies beinhaltet dann die Information aller Messpunkte. Zu diesem Zweck haben wir oben nicht nur eine graphische Darstellung der Messpunkte erzeugt,

wie es in der Aufgabe gefordert war, sondern zusätzlich eine Regression durchgeführt. Es ergibt sich:

$$D = \frac{mc^2}{4} = 27,71 \frac{kg}{s^2} \quad (46)$$

$$\sigma_D = \frac{mc}{2} \sigma_c = 0,075 \frac{kg}{s^2} \quad (47)$$

$$\Rightarrow D = (27,710 \pm 0,075) \frac{kg}{s^2} \quad (48)$$

Nun sollen wir die Federkonstante noch aus dem Wert für die Schallgeschwindigkeit berechnen. Zu erwarten ist, dass dieser Wert ungenauer ist als der obige, da die Schallgeschwindigkeit nur aus einem Wertepaar berechnet wurde.

$$D = \frac{mv_1^2}{a_1^2} = 25,728 \frac{kg}{s^2} \quad (49)$$

$$\sigma_D = \frac{2mv_1}{a_1^2} \sigma_{v_1} = 0,048 \frac{kg}{s^2} \quad (50)$$

$$\Delta D = \left| \frac{2mv_1}{a_1^2} \right| \Delta v_1 + \left| \frac{-2mv_1^2}{a_1^3} \right| \Delta a_1 = 0,476 \frac{kg}{s^2} \quad (51)$$

$$\Rightarrow D = (25,728 \pm 0,048 \pm 0,476) \frac{kg}{s^2} \quad (52)$$

### 5.2.2 Lineare zweiatomige Kette

Auch hier sollen wir die Federkonstante der Kette auf beiden Wegen berechnen. Wie oben halten wir die Berechnung aus einem Wert für wenig sinnvoll. Daher wollen wir das Ergebnis auch hier aus dem Fit schließen. Hier haben wir die Federkonstante aus dem Fit direkt erhalten, einen Wert aus dem akustischen Ast, einen Wert aus dem optischen Ast.

$$D_{ak} = (24.2794 \pm 0,8618) \frac{kg}{s^2} \quad D_{opt} = (26,9399 \pm 0,04955) \frac{kg}{s^2} \quad (53)$$

Die Berechnung aus der Schallgeschwindigkeit liefert:

$$D = \frac{2v_2^2(m+M)}{a_2^2} = 25,728 \frac{kg}{s^2} \quad (54)$$

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{4v_2(m+M)}{a_2^2}\right)^2 \sigma_{v_2} + \left(\frac{2v_2^2}{a_2^2}\right)^2 \sigma_M} = 0,1453 \frac{kg}{s^2} \quad (55)$$



$$\Delta D = \left| \frac{4v_2(m+M)}{a_2^2} \right| \Delta v_2 + \left| \frac{2v_2^2}{a_2^2} \right| \Delta M + \left| \frac{-4v_2^2(m+M)}{a_2^3} \right| \Delta a_2 = 0,2857 \frac{kg}{s^2} \quad (56)$$

$$\Rightarrow D = (25,728 \pm 0,1453 \pm 0,2857) \frac{kg}{s^2} \quad (57)$$

Wie zu erwarten war liefert die Rechnung aus der Schallgeschwindigkeit den gleichen Bestwert, wie bei der linearen einatomigen Kette. Dies liegt daran, dass wir  $M$  aus dem Verhältnis der Geschwindigkeiten berechnet haben.

Die Federkonstante ist für die beiden Ketten gleich. Es ergeben sich auch sehr ähnliche Werte, jedoch sind sie nicht gleich und liegen nicht im Fehlerbereich. Auffällig ist, dass die Werte für den akustischen und den optischen Ast so weit auseinander liegen. Allerdings können wir keine Ursache für diesen Fehler nennen.

### 5.3 Amplitudenverhältnis

Aus den gemessenen Werten für die Amplituden haben wir jeweils Mittelwert und Standardabweichung berechnet.

Anschließend haben wir das Amplitudenverhältnis  $s_{0,m}/s_{0,M}$  bestimmt. Den zum Amplitudenverhältnis gehörigen Fehler haben wir folgendermaßen ermittelt:

$$\sigma_{AmpV} = \sqrt{\left(\frac{1}{s_{0,M}}\right)^2 \sigma_{s_{0,m}}^2 + \left(\frac{s_{0,m}}{s_{0,M}^2}\right)^2 \sigma_{s_{0,M}}^2} \quad (58)$$

Den Korrekturfaktor haben wir der Tabelle in der Vorbereitungshilfe entnommen (Spalte  $j = 9$ ).

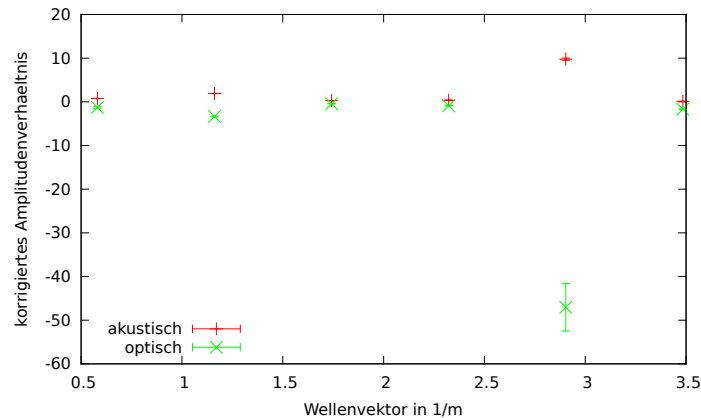
Da das Programm nur die Beträge der Amplituden aufgezeichnet hat, haben wir das Amplitudenverhältnis der optischen Moden nachträglich mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Auch die Korrekturfaktoren mussten wir daher nur in ihrem Betrag berücksichtigen.

Die Werte für das Amplitudenverhältnis, das korrigierte Amplitudenverhältnis und die dazugehörigen Fehler sind dem Messprotokoll angehängt.

In Abbildung 5 auf der nächsten Seite sind die korrigierten Amplitudenverhältnisse gegen  $k_n$  aufgetragen. Im Theorieteil haben wir beschrieben, wie sich die Amplitudenverhältnisse der beiden Äste am Zonenrand und in der Nähe des Ursprungs verhalten. Diese Tendenzen sind unseren Messwerten offensichtlich nicht zu entnehmen.

Wie eingangs erwähnt, konnten die Eigenfrequenzen nicht genau eingestellt werden, so dass eine geringfügige Überlagerung mit anderen Eigenmoden vorhanden war. Dies wurde noch dadurch verstärkt, dass die am Motor befindliche Feder zusätzlich eine transversale Schwingung zeigte. Somit konnte die eingestellte Frequenz vermutlich nicht exakt



**Abbildung 5:** korrigiertes Amplitudenverhältnis

auf die Gleiter übertragen werden.

Jedoch haben wir immer die zu erwartenden Knotenbilder erkennen können. Daher reicht dieser Fehler nicht aus, um zu erklären, weshalb das Amplitudenverhältnis sich so unerwartet verhält.

Auffällig ist, dass sich die beiden Äste in etwa spiegelbildlich verhalten. Dies könnte ein Hinweis auf die Fehlerquelle sein. Jedoch sind wir nicht in der Lage dies zu erklären.

## 6 Literatur

- Vorbereitungshilfe: Gitterschwingungen (Modellversuch)
- Die Abbildungen 1 auf Seite 7 und 2 auf Seite 8 sind der Vorbereitungshilfe entnommen.
- Blüm: Einführung zur Fehlerrechnung im Praktikum; August 2002

---

## 7 Korrektur

### 7.1 zur Bestimmung der Federkonstanten

Wir haben nun auch für die zweiatomige Kette die Federkonstante aus der Gleichung für die Dispersionsrelation mittels eines Wertepaares bestimmt.

Wir haben dies sowohl für eine akustische, als auch für eine optische Mode durchgeführt, da es bei unseren aus dem Fit gewonnenen Werten zwischen diesen Werten Diskrepanzen gab.

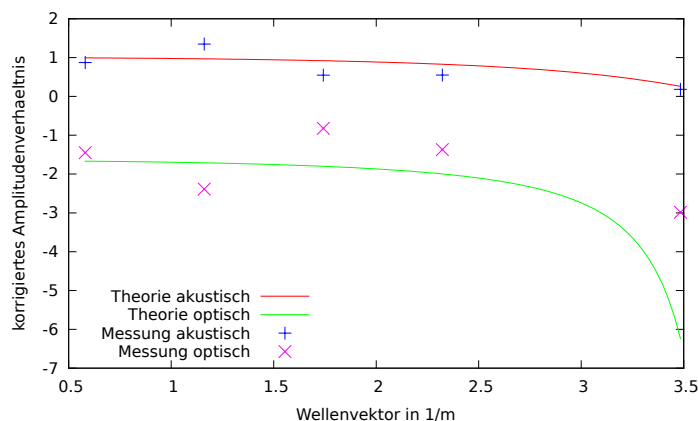
Zur Berechnung haben wir die Wertepaare der sechsten optischen und der vierten akustischen Mode ausgewählt, da diese die geringsten Standardabweichungen in den Frequenzen haben.

$$D_{ak} = 26,13 \frac{kg}{s^2} \quad D_{opt} = 26,83 \frac{kg}{s^2} \quad (59)$$

Diese Werte liegen dicht beieinander. Sie passen auch gut mit dem Wert zusammen, den wir aus einem Wertepaar der einatomigen Kette bestimmt haben. Die Werte aus der Schallgeschwindigkeit liegen jeweils niedriger.

### 7.2 zum Amplitudenverhältnis

Wie besprochen haben wir die Messwerte für die fünfte Mode weggelassen und eine neue Auftragung erstellt, in der auch die theoretische Erwartung, wie sie in der Vorbereitungshilfe gegeben ist, eingezeichnet ist. Dies ist in Abbildung 6 dargestellt. Wie schon aus



**Abbildung 6:** korrigiertes Amplitudenverhältnis und theoretische Erwartung

Abbildung 5 zu erkennen war, passen die Messwerte nicht zur theoretischen Erwartung,

insbesondere die Werte der optischen Moden stimmen überhaupt nicht mit der Theorie überein.

Wir können uns immer noch nicht erklären woraus die besonders in den ersten vier Moden deutlich sichtbare Symmetrie der optischen und akustischen Amplitudenverhältnisse resultiert.

Da die Messungen des Amplitudenverhältnisses jeder einzelnen der zwölf Moden separat durchgeführt wurden, kann auch ein Fehler der Kamera diese Symmetrie nicht erklären.